

24.09.21

13 Група

Математика(алгебра)

Урок 7-8

Тема. Корінь n-го степеня. Арифметичний корінь n-го степеня та його властивості.

Мета уроку: повторити й систематизувати значення учнів про поняття кореня n-го степеня й арифметичного кореня n-го степеня, сформувати знання про властивості кореня n-го степеня; формувати вміння застосовувати ці знання під час перетворення виразів. Формувати інформаційну та полікультурну компетентність. Сприяти формуванню та розвитку інтелектуальних та творчих здібностей учнів. Розвивати логічне мислення, математичну мову, пізнавальний інтерес учнів, вміння шукати цікаву інформацію. Виховувати відповідальність, прагнення до самовдосконалення, патріотизм, любов до рідного краю.

Матеріали до уроку

Квадратні корені

Означення квадратного кореня

з числа a :

число, квадрат якого дорівнює a .

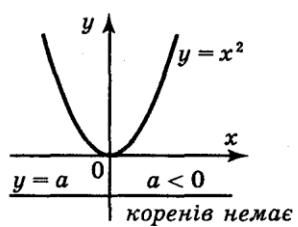
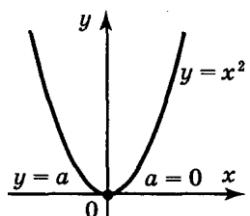
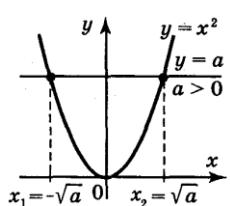
Означення арифметичного

квадратного кореня з числа a :

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ b^2 = a. \end{cases}$$

Корінь рівняння:

$$x^2 = a.$$



Тотожності

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad a > 0.$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Основні властивості

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0.$$

$$\sqrt{a^{2k}} = a^k, \quad a \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$(\sqrt{a})^p = \sqrt{a^p}, \quad a \geq 0$$

ІІ. Сприймання і усвідомлення нового матеріалу (таблиця 2).

! Коренем n -го степеня із дійсного числа a називається число, n -й степінь якого дорівнює a .

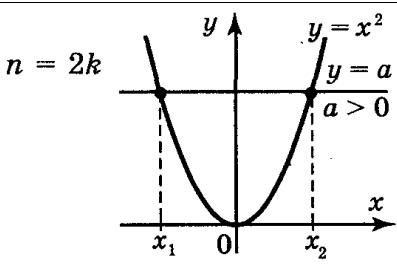
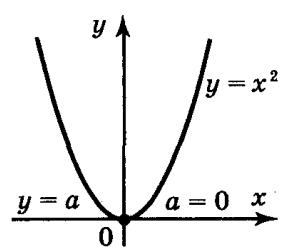
Наприклад: корінь третього степеня із числа 8 дорівнює 2, бо $2^3 = 8$. Корінь четвертого степеня з числа 81 є числа 3 і -3, бо $3^4 = 81$, $(-3)^4 = 81$.

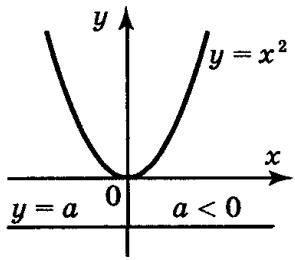
Згідно даного означення, корінь n -го степеня — це корінь рівняння $x^n = a$. Число коренів цього рівняння залежить від n і a .

Якщо n — парне, тобто $n = 2k$, $k \in N$, то рівняння $x^{2k} = a$ має два корені, якщо $a > 0$; один корінь, якщо $a = 0$; не має коренів, якщо $a < 0$.

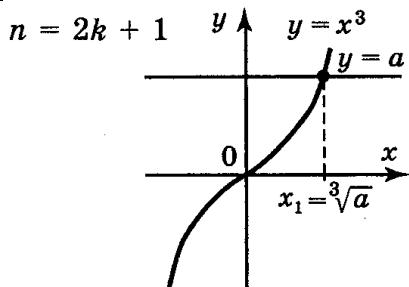
Якщо n — непарне, тобто $n = 2k + 1$, $k \in N$, то рівняння $x^{2k+1} = a$ завжди має лише один корінь.

Таблиця 2

Корінь n -го степеня	
<p>Означення кореня n-го степеня з числа a:</p> <p>число, n-й степінь якого дорівнює a.</p> <p>Корінь рівняння:</p> $x^n = a$  	<p>Означення арифметичного кореня n-го степеня з числа a:</p> $\begin{cases} \sqrt[n]{a} = b \\ a \geq 0 \\ n \in N, n \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^n = a \end{cases}$ <p>$\sqrt[3]{a}, \sqrt[5]{a}, \dots, \sqrt[2k+1]{a}$ — існують для $a \in R$.</p> <p>Якщо $a < 0$, то $\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a}$.</p> <p>$\sqrt{a}, \sqrt[4]{a}, \dots, \sqrt[2k]{a}$ — існують для $a \geq 0$.</p> <p>Тотожності</p> <p>Якщо $\sqrt[n]{a}$ існує, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.</p> $\sqrt[2n]{a^{2n}} = a , a \in R$



$$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a, a \in \mathbb{R}.$$



Основні властивості
 $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0.$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, a \geq 0, b > 0.$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k},$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}.$$



Невід'ємний корінь рівняння $x^n = a$ називають арифметичним коренем n -го степеня із числа a .

! Арифметичним коренем n -го степеня із невід'ємного числа a називається таке невід'ємне число, n -й степінь якого дорівнює a .

Арифметичний корінь n -го степеня із числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$. Число n називають показником кореня, число a — підкореневим числом (виразом).

Якщо $n = 2$, то замість $\sqrt[2]{a}$ пишуть \sqrt{a} і називають арифметичним квадратним коренем.

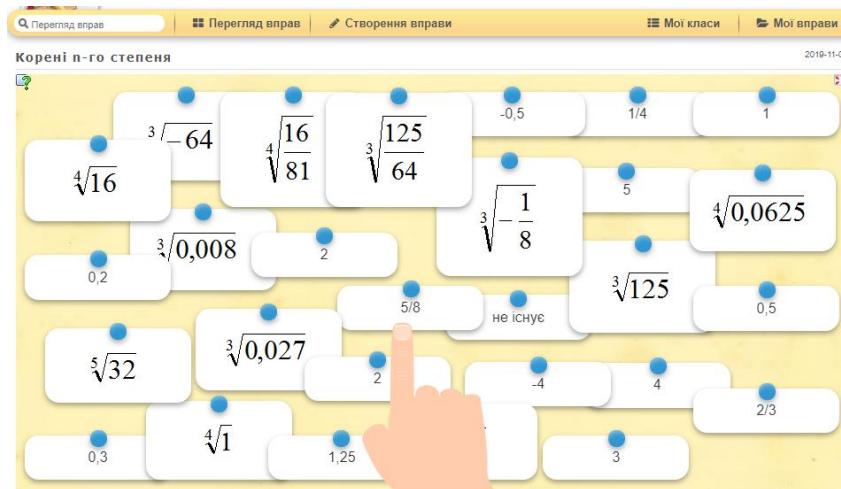
Арифметичний корінь третього степеня називають кубічним коренем.

У тих випадках, коли зрозуміло, що мова йде про арифметичний корінь n -го степеня, коротко говорять «корінь n -го степеня».

1. Дайте означення кореня n -го степеня.
2. Сформулюйте означення арифметичного кореня n -го степеня із числа a .
3. Чи має зміст вираз $\sqrt{-3}$

4. Обчисліть $\sqrt[5]{1}$

5. Обчисліть значення кореня n-го степеня з чисел.



1. Корінь n-го степеня з добутку.

Теорема . Корінь n-го степеня з добутку двох невід'ємних чисел дорівнює добутку коренів n-го степеня із цих чисел.

Якщо $a > 0, b > 0$, то виконується рівність:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Наприклад: 1) $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$; 2) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{125} = 5$

2. Корінь n-го степеня з дробу

Теорема. Корінь n-го степеня з дробу, чисельник якого невід'ємний, знаменник додатний, дорівнює кореню n-го степеня із чисельника, поділеному на корінь n-го степеня із знаменника.

Якщо $a > 0, b > 0, b \neq 0$, то виконується рівність:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Наприклад: 1) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$

2) $\sqrt[4]{\frac{80}{45}} = \sqrt[4]{16} = 2$

3. Корінь n-го степеня із степеня

Для будь-якого дійсного a і натурального n, $n \geq 2$ маємо:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{якщо } n - \text{парне} \\ a, & \text{якщо } n - \text{непарне} \end{cases}$$

Наприклад: 1) $\sqrt[8]{9^8} = |9| = 9$; 2) $\sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2$; 3) $\sqrt[5]{7^5} = 7$; 4) $\sqrt[5]{(-8)^5} = -8$.

4. Корінь n-го степеня із кореня

Якщо n і k – натуральні числа і $a \geq 0$, то :

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

Наприклад: 1) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[15]{2}$; 2) $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$.

Якщо n , k і m – натуральні числа і $a \geq 0$, то :

$$\sqrt[nm]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}$$

Наприклад: 1) $\sqrt[3]{3^6 \cdot 5^3} = 3^2 \cdot 5 = 45$; 2) $\sqrt[12]{81} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3]{3}$.

Приклад. Знайдемо значення:

$$a) \sqrt[3]{8}; \quad b) \sqrt[4]{81}; \quad c) \sqrt[5]{1}; \quad d) \sqrt[100]{0}.$$

a) $\sqrt[3]{8} = 2$, оскільки $2^3 = 8$ і $2 > 0$;

b) $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3^4 = 81$ і $3 > 0$;

c) $\sqrt[5]{1} = 1$, оскільки $1^5 = 1$ і $1 > 0$;

d) $\sqrt[100]{0} = 0$, оскільки $0^{100} = 0$.

Корінь парного степеня існує лише з невід'ємних чисел, отже, вираз $\sqrt[2k]{a}$ має смысл, якщо $a \geq 0$ і набуває невід'ємних значень.

Корінь непарного степеня існує з будь-якого дійсного числа і до того ж тільки один.

Для коренів непарного степеня справедлива рівність $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$.

Дійсно $(-\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = (-1)^{2k+1}(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = -a$.

Рівність $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$ дозволяє виразити корінь непарного степеня з від'ємного числа через арифметичний корінь того ж степеня.

Приклад. Знайдемо значення:

a) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-32}$; в) $\sqrt[3]{-27}$.

a) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$; б) $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$; в) $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$.

Отже, вираз $\sqrt[2k+1]{a}$ має смисл для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ і може набувати будь-яких значень.

№1 Знайти значення виразу:

1) $\sqrt[3]{81 \cdot 125}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}$; 4) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$; 5) $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 7^5}$

Розв'язуємо гуртом



1

Знайдіть значення виразу:



1) $\sqrt[3]{81 \cdot 125}$

15

2) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

$\frac{2}{3}$

3) $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}$

3

4) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$

Активация Windows 2
http://www.microsoft.com/windows/vnext.aspx
раздел "Параллельно"

5) $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 7^5}$

28

№2 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{0,0001 \cdot 81}$; 2) $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$; 3) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$; 4) $\sqrt[4]{(-13)^4}$; 5) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$; 6) $\sqrt[7]{\frac{5^7}{4^{14}}}$

Розв'язуємо гуртом

2



Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{0,0001 \cdot 81}$	0.3
2) $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$	6
3) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$	2
4) $\sqrt[4]{(-13)^4}$	13
5) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$	$\sqrt[12]{5}$
6) $\sqrt[7]{\frac{5^7}{4^{14}}}$	$\frac{5}{16}$

№3 Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[4]{11 - \sqrt{40}} \cdot \sqrt[4]{11 + \sqrt{40}}; \quad 2) \sqrt[3]{5 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{5 + \sqrt{17}}$$

Розв'язуємо гуртом

3



Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[4]{11 - \sqrt{40}} \cdot \sqrt[4]{11 + \sqrt{40}}$$

$$\begin{aligned} 1) \sqrt[4]{(11 - \sqrt{40})(11 + \sqrt{40})} &= \sqrt[4]{11^2 - \sqrt{40}^2} \\ &= \sqrt[4]{121 - 40} = \sqrt[4]{81} = 3 \end{aligned}$$

$$2) \sqrt[3]{5 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{5 + \sqrt{17}} \quad 2$$

№4 Порівняйте числа.

$$1) \sqrt[3]{19} \text{ i } \sqrt[3]{20}; \quad 2) \sqrt{3} \text{ i } \sqrt[3]{5}$$

Розв'язуємо гуртом

4

Порівняйте числа:



$$1) \sqrt[3]{19} \text{ i } \sqrt[3]{20} \quad \sqrt[3]{19} < \sqrt[3]{20}$$

$$2) \sqrt{3} \text{ i } \sqrt[3]{5} \quad \sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[6]{27} \text{ i } \sqrt[6]{25}$$

$$\sqrt[6]{27} > \sqrt[6]{25}$$

Готуємось до ЗНО

(2009) 3. Знайдіть значення виразу: $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$

A	Б	В	Г	Д
4	18	64	2	8

(2014) 9. Обчисліть $\sqrt{(-2)^2} + \sqrt[3]{(-3)^3} =$

A	Б	В	Г	Д
-5	1	5	-1	-23

Домашнє завдання

№ 105, 114, 121.

Зворотній зв'язок:

ysipovich.anna@gmail.com