

28.09.2021

Група Б-1

Вища математика

Урок 21-22

Тема: Границя послідовності. Невизначеності

### Матеріали до уроку:

#### Розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$

Для розкриття цієї невизначеності користуються такими методами:

- розділяють чисельник і знаменник на множники, після чого скорочують дріб на нескінченно малий співмножник і потім переходять до границі;
- переносять ірраціональність з чисельника у знаменник або із знаменника в чисельник, а іноді за необхідністю – і те і друге, після чого одержаний дріб скорочують і переходять до границі;
- використовують першу чудову границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1;$$

- використовують властивість еквівалентності нескінченно малих величин.

Нагадаємо, що коли  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$ , то  $\alpha \sim \beta$  – еквівалентні нескінченно малиі величини при  $x \rightarrow x_0$ , тобто  $\alpha \sim \beta$ .

При  $x \rightarrow 0$   $\sin x \sim x$ ,  $\operatorname{tg} x \sim x$ ,  $\arcsin x \sim x$ ,  $\operatorname{arctg} x \sim x$ ,  $\ln(1+x) \sim x$ ,  $e^x - 1 \sim x$ .

Зауважимо, що в таких випадках, коли чисельник або знаменник (або і чисельник, і знаменник) являє собою суму (або різницю) нескінченно малих функцій, то при обчисленні границі, взагалі кажучи, не можна замінити окремі додатки еквівалентними функціями. Така заміна може привести до неправильного результату.

Приклад 6 Знайти  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$ .

**Розв'язання.** При  $x \rightarrow 1$  чисельник і знаменник даного дробу прямують до нуля. Тому безпосередньо застосування теореми про границю частки тут неможливе. Розкладаючи чисельник і знаменник даного дробу на множники, одержуємо:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2, \quad x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x(x + 1)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Слід зазначити, скорочення дробу на  $x - 1$  було законним тому, що при знаходженні границі в точці  $x = 1$  значення цієї функції у точці  $x = 1$  не беремо до уваги, тобто  $x$ , прямуючи до одиниці і, отже, на нуль ми не скорочували.

**Приклад 8** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ .

**Розв'язання.** Після підстановки граничного значення  $x$  маємо визначеність виду  $\frac{0}{0}$ . Звільнимося від ірраціональності у чисельнику, помноживши чисельник і знаменник на спряжений чисельнику множник  $\sqrt{x-1}+2$ . Після скороченого дробу на нескінченно малий множник і використання теорем про граници, одержимо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

**Приклад 10** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ .

**Розв'язання.** Використовуючи першу чудову границю, матимемо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Цей приклад можна було б розв'язати ще й так. При  $x \rightarrow 0$   $\sin 3x \sim 3x$ , тому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 3.$$

**Приклад 11** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 5x}$ .

**Розв'язання.** Через те що при  $x \rightarrow 0$   $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$  і  $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 5x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

### Розкриття невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$

Для розкриття цієї невизначеності заданої відношенням многочленів, чисельник і знаменник ділять на найвищу, що входить до них степінь  $x$ , і потім переходятять до граници.

**Приклад 14** Знайти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$ .

**Розв'язання.** Ні чисельник, ні знаменник не мають граници при  $x \rightarrow \infty$ . Застосувати теорему про границю частки безпосередньо не можемо. Тому перетворимо дріб, поділивши його чисельник і знаменник на  $x^4$ . Дістанемо

$$-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x + 1/x^3}{1 - 3/x^2 + 1/x^4}.$$

Оскільки при  $x \rightarrow \infty$ :

$$1/x \rightarrow 0, \quad 1/x^3 \rightarrow 0, \quad 3/x^2 \rightarrow 0, \quad 1/x^4 \rightarrow 0,$$

то, застосувавши теорему про границю суми, переконуємося, що чисельник має границю, яка дорівнює 0, а знаменник – 1. За теоремою про границю частки маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

**Приклад 16** Знайти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$ .

**Розв'язання.** Маємо невизначеність виду  $\frac{\infty}{\infty}$ . Поділивши чисельник і знаменник на  $x^2$ , тобто на старшу степінь  $x$ , і використавши властивості границь, одержимо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 1/x^2}{2 + 1/x^2} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Далі при обчисленні границь можна користуватись таким правилом: якщо чисельник і знаменник дробу - многочлени і  $x \rightarrow \infty$ , то границя дробу дорівнює:

- 1) відношенню коефіцієнтів при старшій степені змінної, якщо многочлени однакової степені;
- 2) нулю, якщо степінь многочленна чисельника нижча за степінь многочленна знаменника;
- 3) нескінченності, якщо степінь многочленна чисельника вища за степінь многочленна знаменника.

**Приклад 17** Знайти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x+3x^3}$ .

**Розв'язання.** Через те що степені многочленів чисельника і знаменника однакові і  $x \rightarrow \infty$ , шукана границя дорівнює відношення коефіцієнтів при старшій степені  $x$ , тобто

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{-3}{3} = -1.$$

### Розкриття невизначеності $\infty - \infty$

Невизначеність такого виду розкривається одним з двох шляхів:

- 1) зведенням дробів до спільного знаменника, в результаті чого приходимо або до невизначеності  $\frac{0}{0}$ , або до невизначеності  $\frac{\infty}{\infty}$ ;
- 2) перенесенням ірраціональності з чисельника в знаменник.

**Приклад 18** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ .

**Розв'язання.** При  $x \rightarrow 1$  задана функція являє собою різницю двох нескінченно великих величин (випадок  $\infty - \infty$ ). Виконаємо віднімання дробів

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \frac{x^2+x-2}{1-x^3}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{1-x^3} = \left( \frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = -\frac{3}{3} = -1. \end{aligned}$$

**Приклад 19** Знайти  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$ .

**Розв'язання.** Тут також маємо невизначеність виду  $\infty - \infty$ .  
Помноживши і поділивши дану функцію на  $(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x)$ , одержимо

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x)}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6x - x^2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x + 6}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5 + 6/x}{\sqrt{1 - 5/x + 6/x^2} + 1} = -5/2.\end{aligned}$$

### Домашнє завдання:

Знайти границі

4       $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right).$

5       $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}.$

6       $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}).$

7       $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}.$

8       $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right).$

Зворотній зв'язок

E-mail [vitasergiiivna1992@gmail.com](mailto:vitasergiiivna1992@gmail.com)

**!!!! у повідомленні з д/з не забувася вказувати прізвище, групу і дату уроку.**