

19.10.2021

Група 22

Математика (геометрія)

Урок 1-2

Тема: Кут між прямими. Перпендикулярність прямих у просторі

Мета:

Навчальна - повторити поняття «кут», знайти різницю між плоским кутом у кутом у просторі; повторити та удосконалити знання про перпендикулярність;

Розвивальна – розвинути просторову уяву, логічне мислення.

### Матеріали до уроку:

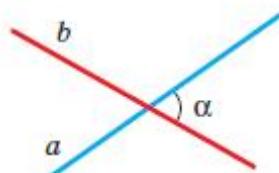
Розгляньте малюнок 250 і згадайте, як можуть розташовуватися у просторі дві прямі. Спробуйте уявити, які кути утворюють ці прямі в кожному випадку.

Щоб увести поняття *кута між прямими* у просторі, слід розглянути три випадки:

- прямі перетинаються;
- прямі паралельні;
- прямі мимобіжні.



Мал. 250



Мал. 251

Якщо дві прямі перетинаються, вони утворюють чотири кути (мал. 251). Кутову міру не найбільшого з них називають *кутом між двома прямими, що перетинаються*. Кут між прямими, що перетинаються, не перевищує  $90^\circ$ .

Позначають кут між прямими  $a$  і  $b$  символом  $\angle(ab)$ .

*Зauważення.* Кут між прямими — не фігура, а кутова міра, величина.

### ТЕОРЕМА 9

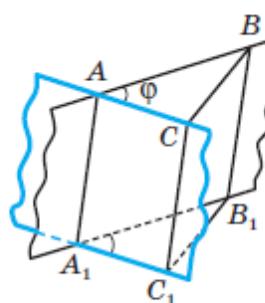
Якщо дві прямі, які перетинаються, паралельні іншим прямим, що перетинаються, то кут між першими прямими дорівнює куту між другими.

### ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямі  $AB$  і  $AC$ , що перетинаються, паралельні відповідно прямим  $A_1B_1$  і  $A_1C_1$ . Доведемо, що кут між прямими  $AB$  і  $AC$  дорівнює куту між прямими  $A_1B_1$  і  $A_1C_1$  (мал. 252).

Розглянемо спочатку випадок, коли дані прямі лежать у різних площинах. Якщо  $\angle BAC = \varphi$  — кут між прямими  $AB$  і  $AC$  ( $\varphi \leq 90^\circ$ ), то через довільні точки  $B$  і  $C$  його сторін проведемо прямі  $BB_1$  і  $CC_1$ , паралельні  $AA_1$ .

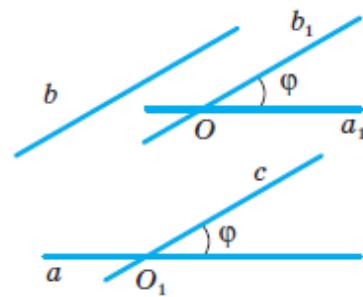
Нехай прямі  $BB_1$  і  $A_1B_1$  перетинаються в точці  $B_1$ , а прямі  $CC_1$  і  $A_1C_1$  — у точці  $C_1$ . Чотирикутники  $AA_1B_1B$  і  $AA_1C_1C$  — паралелограми, оскільки їх протилежні сторони попарно паралельні. Відрізки  $BB_1$  і  $CC_1$  паралельні та рівні, оскільки кожний з них паралельний відрізку  $AA_1$  і дорівнює йому. Отже, чотирикутник  $BB_1C_1C$  теж паралелограм,  $CB = C_1B_1$ . За трьома сторонами  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ , тому  $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC = \varphi$ . Отже, кут між прямими  $A_1B_1$  і  $A_1C_1$  дорівнює куту між прямими  $AB$  і  $AC$ .  $\square$



Мал. 252

У випадку, коли прямі  $AB$ ,  $AC$ ,  $A_1B_1$  і  $A_1C_1$  лежать в одній площині, можна дослівно повторити наведені міркування. Тільки точку  $C$  треба брати поза прямою  $BB_1$ , щоб паралелограм  $BB_1C_1C$  не виродився у відрізок.

Тепер введемо поняття *кута між мимобіжними прямими*. Нехай  $a$  і  $b$  — довільні мимобіжні прямі. Через будь-яку точку  $O$  простору проведемо прямі  $a_1$  і  $b_1$ , паралельні  $a$  і  $b$  (мал. 253). Кут  $\phi$  між побудованими так прямими  $a_1$  і  $b_1$ , які перетинаються, називають кутом між даними мимобіжними прямими  $\angle(ab) = \angle(a_1b_1)$ .



Мал. 253

**Кутом між мимобіжними прямими називають кут між прямими, які перетинаються і паралельні відповідно даним мимобіжним прямим.**

**Дві прямі називають перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює  $90^\circ$ .**

Цей кут не залежить від вибору точки  $O$ . Адже, якщо через яку-небудь іншу точку простору провести прямі, паралельні прямим  $a$  і  $b$ , кут між ними теж дорівнює  $\phi$  (теорема 9). Точку  $O$  можна брати і на будь-якій з даних прямих. Якщо  $b \parallel c$ , то завжди  $\angle(ab) = \angle(ac)$ .

Кут між мимобіжними прямими, як і між прямими однієї площини, не може мати більше від  $90^\circ$ . Кут між паралельними прямими вважають таким, що дорівнює  $0^\circ$ .

Перпендикулярними можуть бути як прямі, що перетинаються, так і мимобіжні

прямі. Наприклад, якщо  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  — куб, то кожна з прямих  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ ,  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1D_1$ ,  $D_1A_1$  перпендикулярна до прямої  $AA_1$  (мал. 254).

Відрізки (промені) називають перпендикулярними, якщо вони належать *перпендикулярним* прямим.

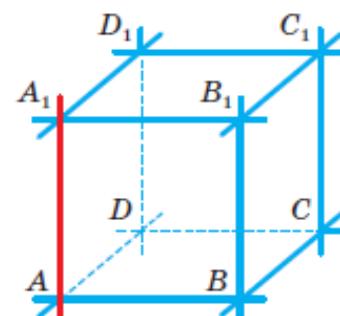
## ТЕОРЕМА 10

**Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.**

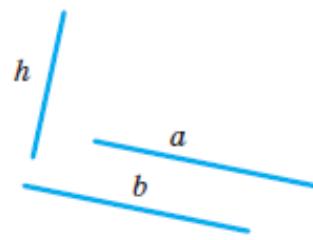
## ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямі  $a$  і  $b$  паралельні і  $h \perp a$ . Доведемо, що  $h \perp b$  (мал. 255).

Якщо  $b \parallel a$ , то завжди  $\angle(hb) = \angle(ha)$ . У даному випадку  $\angle(ha) = 90^\circ$ , тому і  $\angle(hb) = 90^\circ$ , тобто  $h \perp b$ . Що й треба було довести.  $\square$



Мал. 254



Мал. 255

Виконання вправ:

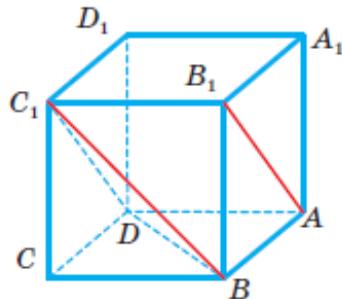
- 1) Знайдіть кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба.

**Розв'язання.** Знайдемо кут між діагоналями  $AB_1$

і  $BC_1$  граней куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  (мал. 258).

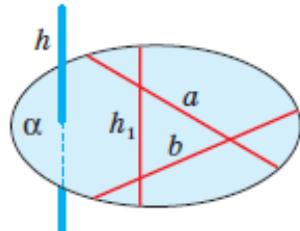
Оскільки  $DC_1 \parallel AB_1$ , то кут між прямими  $AB_1$  і  $BC_1$  дорівнює куту  $BC_1D$ .  $\angle BC_1D = 60^\circ$ , оскільки  $\triangle BC_1D$  рівносторонній. Отже, кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба дорівнює  $60^\circ$ .

- 2) Доведіть, що пряма, перпендикулярна до двох прямих, які перетинаються, перетинає площину, що проходить через них.



Мал. 258

**Розв'язання.** Припустимо, що пряма  $h$ , перпендикулярна до двох прямих  $a$  і  $b$ , які перетинаються, не перетинає площину  $\alpha$ , що проходить через них (мал. 259). Тоді  $h \parallel \alpha$  або  $h \subset \alpha$ . В обох випадках у площині  $\alpha$  знайдеться пряма  $h_1$ , паралельна  $h$ . І якщо пряма  $h$  перпендикулярна до прямих  $a$  і  $b$ , то паралельна їй пряма  $h_1$  теж перпендикулярна до цих прямих. Прийшли до суперечності, оскільки пряма, яка лежить у площині, не може бути перпендикулярною до двох прямих цієї площини, що перетинаються. Отже, пряма  $h$  перетинає площину  $\alpha$ .



Мал. 259

### Домашнє завдання:

**Підручник Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. 2018р.**

Виконати №1013, 1019 ст.213

**Зворотній зв'язок:**

E-mail [vitasergiiivna1992@gmail.com](mailto:vitasergiiivna1992@gmail.com)