

04.11.2021

Група Б-1

Вища математика

Урок 49-50

Тема: Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Мета:

Навчальна – ознайомити з поняттям «інтерполяційний многочлен» та навчитись його використовувати під час розв'язання вправ;

Розвивальна – розвинути математичні здібності, увагу, уяву;

Виховна – виховати культуру навчального процесу та математичних записів.

Матеріали до уроку

Нехай відоме значення деякої функції f в $n+1$ різних точках x_0, x_1, \dots, x_n , які позначені наступним чином:

$$f_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Наприклад, ці значення отримані з експерименту, або знайдені із допомогою достатньо важких обчислень.

Виникає задача наближеної відновленої функції f в деякій точці x . Найчастіше для вирішення цієї задачі будується алгебраїчний многочлен $L_n(x)$ степеня n , який в точках x_i отримує задані значення, і так далі

$$L_i(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1)$$

називається **інтерполяційним**. Точки $x_i, i=0,1,\dots,n$ ми будемо розуміти многочлен степеня не більше n і називаються точками інтерполяції. Наприклад, якщо $f_i = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n$, то інтерполяційний многочлен $L_n(x) \equiv 0$ фактично має нульову степінь, але його теж будем називати інтерполяційним многочленом n -го степеня.

Приблизне відновлення функції f по формулі

$$f(x) \approx L_n(x) \quad (2)$$

Називається інтерпеляцією функції f (з допомогою алгебраїчного многочлена). Якщо x знаходиться за межами мінімального відрізка вміщаючого всі точки інтерпеляції x_0, x_1, \dots, x_n то зміну функції по формулі (2) називають екстраполяцією.

Теорема 1:

Існує єдиний інтерполяційний многочлен n -го степеня, відповідаючий умові (1).

Доведення: Існування інтерполяційного многочлена безпосередньо установим, виписавши його. Нехай $n=1$, тоді

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f_1 \quad (3)$$

При $n=2$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f_2$$

в, кінці в будьому випадку при будьому натуральному n

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n p_{n_i}(x) f_i, \quad (4)$$

де

$$p_{n_i}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}, \quad (5)$$

Інтерполяційний многочлен, приставлений у виді (5), називається інтерполяційним многочленом Лагранжа, а функції (многочлени) – лагранжовими коефіцієнтами є і другі форми запису інтерполяційного многочлена. Однак по теоремі (1) інтерполяційний многочлен n-го степеня (точніше кажучи, степені не більше n), задовільняючий умовам (1), єдиний.

Фактичну степінь інтерполяційного многочлена (5) можна вияснити після розкривання дужок і зведення подібних членів. Однак, якщо в точках x_i в якості f_i беруться значення деякого многочлена $P_k(x)$ степеня $k \leq n$, то по теоремі (1) зведемо $L_n(x) \equiv P_k(x)$, так як $P_k(x)$ є також многочленом степеня не більше n, задовільняючий умовам (1). Частково, якщо $f_i = 1, i = 0, 1, \dots, n$, то $L_n(x) \equiv P_0(x) \equiv 1$.

Звідси із (5) випливає наступне $\sum_{i=0}^n p_{in}(x) \equiv 1$, яке може служити контролем при обчисленні Лагранжеві коефіцієнтів.

Оскільки інтерполяційний многочлен (5) лінійно залежить від значення функції f_i , то інтерполяційний многочлен для суми двох функцій рівний сумі інтерполяційних многочленів для складених.

Приклад: Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа по наступним даним

i	0	1	2	3
x_i	0	2	3	5
f_i	1	3	2	5

Розв'язання: Згідно (5) при $n=3$ маємо

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} \cdot 1 + \frac{x(x-3)(x-5)}{2(2-3)(2-5)} \cdot 3 + \frac{x(x-2)(x-5)}{2(3-2)(3-5)} \cdot 2 + \frac{x(x-2)(x-3)}{5(5-2)(5-3)} \cdot 5 = \\ &= 1 + \frac{62}{15}x + \frac{13}{6}x^2 + \frac{3}{10}x^3 \end{aligned}$$

Усе можна написати у вигляді рівняння:

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x), \quad (9)$$

де $R_n(x)$ – кінцевий член. Якщо відмінність функції f нічого не відомо, крім її значення f_i у точках інтерполяції то ніяких корисних думок відносно кінцевого члена $R_n(x)$ зробити не можна. Ми отримаємо деякі вираження кінцевого члена в припущенні, що $f \in C_{n+1}[a, b]$, де $[a, b]$ – відрізок, вміщаючи всі точки інтерпеляції $x_i, i = 0, 1, \dots, n, i$ точку x .

Інтерполяційна формула Лагранжа — приклад:

Для функції, заданої таблично, знайти наближене значення в точці $x = 7$, використовуючи при цьому інтерполяційну формулу Лагранжа.

x_i	-1	0	2	4	6	9
$f(x_i)$	-2	3	1	7	-1	5

Таблиця фіксованих значень функції

Для розв'язку даної задачі будемо використовувати інтерполяційний многочлен Лагранжа для $n = 5$ вузлів інтерполяції:

$$L_5(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)(x_0 - x_5)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)} y_1 + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5)} y_2 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)(x - x_5)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)} y_3 + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_5)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_4 - x_5)} y_4 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_5 - x_0)(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)(x_5 - x_4)} y_5$$

Підставляючи в дану формулу значення точки x та значення з таблиці, отримуємо наближене значення функції у заданій точці.

$$L_5(7) = \frac{(7 - 0)(7 - 2)(7 - 4)(7 - 6)(7 - 9)}{(-1 - 0)(-1 - 2)(-1 - 4)(-1 - 6)(-1 - 9)} (-2) + \frac{(7 - (-1))(7 - 2)(7 - 4)(7 - 6)(7 - 9)}{(0 - (-1))(0 - 2)(0 - 4)(0 - 6)(0 - 9)} 3 + \\ + \frac{(7 - (-1))(7 - 0)(7 - 4)(7 - 6)(7 - 9)}{(2 - (-1))(2 - 0)(2 - 4)(2 - 6)(2 - 9)} 1 + \frac{(7 - (-1))(7 - 0)(7 - 2)(7 - 6)(7 - 9)}{(4 - (-1))(4 - 0)(4 - 2)(4 - 6)(4 - 9)} 7 + \\ + \frac{(7 - (-1))(7 - 0)(7 - 2)(7 - 4)(7 - 9)}{(6 - (-1))(6 - 0)(6 - 2)(6 - 4)(6 - 9)} (-1) + \frac{(7 - (-1))(7 - 0)(7 - 2)(7 - 4)(7 - 6)}{(9 - (-1))(9 - 0)(9 - 2)(9 - 4)(9 - 6)} 5 = \\ = -0.4 - 1.7 + 1 - 9.8 - 1.7 + 0.4 = -12.2$$

Домашнє завдання:

Приклад 1. Для функції $y = y(x)$, заданої таблицею своїх значень, побудувати інтерполяційний многочлен 3-го степеня у формі Лагранжа. Обчислити значення функції в точці $x_* = 2,5$.

i	0	1	2	3
x_i	2	3	4	5
f_i	7	5	8	7

Зворотній зв'язок

Viber/Telegram 0988025226

E-mail chervyak.v92@gmail.com