

23.02.2022

Група М-1

Вища математика

Урок 57

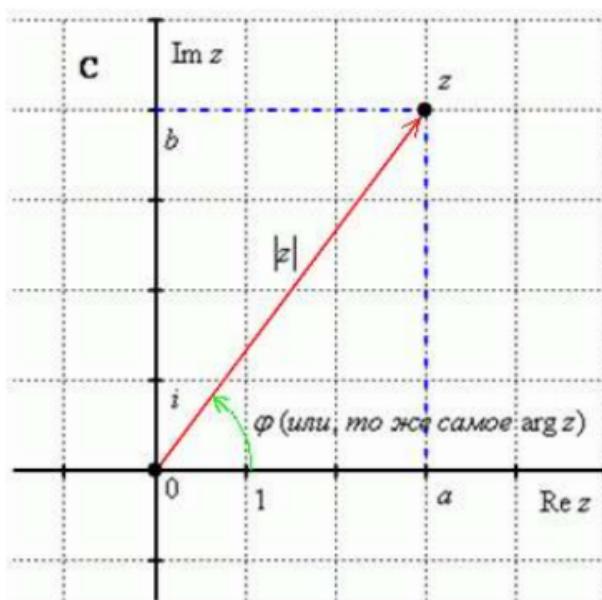
Тема уроку: Тригонометрична форма комплексного числа.

Мета уроку :

- сформувати в учнів поняття тригонометрична форма комплексного числа; вивчення дій над комплексними числами записаних у тригонометричній формі;
- розвивати самостійне логічне мислення, вміння порівнювати, узагальнювати, систематизувати, робити висновки, розвивати математичне мовлення;
- виховувати науковий світогляд учнів, культуру письма, комунікативні навички, почуття взаємоповаги.

Матеріали для уроку:

Зобразимо на комплексній площині число $z = a + bi$. Для визначеності і простоти пояснень розташуємо його в першій координатній чверті, тобто вважаємо, що: $a > 0$; $b > 0$.



Модулем комплексного числа z називається відстань від початку координат до відповідної точки комплексної площини. Попросту кажучи, модуль - це довжина радіус-вектора, який на кресленні позначений червоним кольором.

Модуль комплексного числа стандартно позначають r : або $|z|$

По теоремі Піфагора легко вивести формулу для знаходження модуля комплексного числа: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. (3)

Аргументом комплексного числа називається кут між додатною піввіссю дійсної осі і радіус-вектором, проведеним з початку координат до відповідної точки. Аргумент не визначено для числа: $z = 0$.

Даний принцип практично одинаковий з полярними координатами, де полярний радіус і полярний кут однозначно визначають точку.

Аргумент комплексного числа z стандартно позначають φ : або $\arg z$

За означенням $\sin \varphi = \frac{b}{r}$; $\cos \varphi = \frac{a}{r}$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$

З геометричних міркувань виходить наступна формула для знаходження аргументу: $\arg z = \arctg \frac{b}{a}$

Увага! Дано формула працює тільки в правій півплощині! Якщо комплексне число розташовується не в 1-й і не 4-й координатній чверті, то формула буде трохи іншою.. Ці випадки ми теж розберемо.

$$\text{Виразимо } a = r * \cos \varphi ; \quad b = r * \sin \varphi$$

$$\text{Підставимо: } z = a + bi = r * \cos \varphi + i * r * \sin \varphi = r(\cos \varphi + i * \sin \varphi)$$

$$z = r(\cos \varphi + i * \sin \varphi) \quad (4)$$

- тригонометрична форма комплексного числа, де $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль к. ч., а

φ – аргумент к. ч.

Алгоритм переводу комплексного числа із алгебраїчної форми в тригонометричну

$$\text{Знаходимо модуль к.ч. за формулою (1)} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

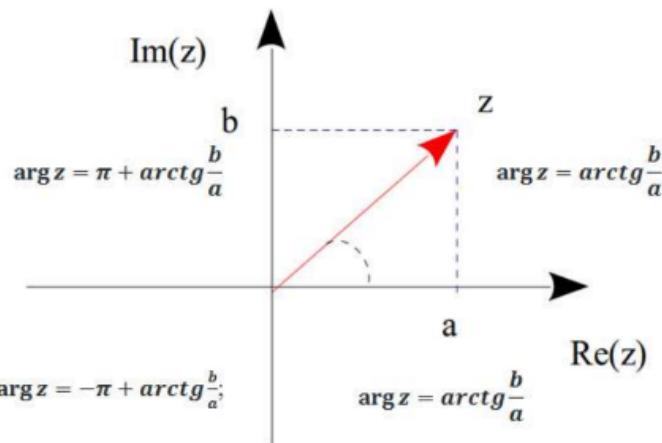
Знаходимо аргумент φ .

Формули для знаходження аргументу будуть різними, це залежить від того, в якій координатній чверті лежить число.

При цьому можливі три варіанти

Записуємо к.ч. в тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i * \sin \varphi)$$



Вправа: Подати у тригонометричній формі комплексні числа: $z_1 = -2 - 2i$

Розв'язок: Для числа z_1 : $a = 2, b = -2 \Rightarrow r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Число z_1 лежить у 3 чверті ($a < 0, b < 0$), тому аргумент знаходимо за формулою: $\arg z = -\pi + \arctg \frac{b}{a}$. $\arg z_1 = \arctg \frac{-2}{2} = \arctg(-1) \Rightarrow \varphi = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{4\pi - \pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$ (Дивись у таблицю арктангенсів). Тоді тригонометрична форма числа z_1 буде: $z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \right)$

Домашнє завдання:

1. Записати в тригонометричній формі комплексні числа

- 1) $z = -7$; 2) $z = 5,2$; 3) $z = 4,7i$; 4) $z = -\pi i$; 5) $z = 5 + 5i$; 6) $z = \sqrt{3} - i$;
- 7) $z = 1 + i(\sqrt{2} - 1)$; 8) $z = 2 \left(\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3} \right)$; 9) $z = -3 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.

Зворотній зв'язок:

E-mail vitasergiivna1992@gmail.com