

01.04.2022

Група 31

Математика (алгебра)

Урок 41-42

Тема: Розв'язування ірраціональних рівнянь

Мета:

- повторити, перевірити та закріпити вміння розв'язувати ірраціональні рівняння та нерівності; систематизувати вміння застосовувати набуті знання до розв'язування задач, передбачених програмою ЗНО з математики;
- виховувати в учнів працьовитість, вміння долати труднощі;
- розвивати логічне мислення.

Матеріали до уроку:

Розв'язання рівнянь

Приклад 2. Розв'язати рівняння $(x^2 + 6x + 5)\sqrt{9x - 2} = 0$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень даного рівняння:

$$9x - 2 \geq 0; x \geq \frac{2}{9}.$$

$$x_1 = -1; x_2 = -5; x_3 = \frac{2}{9}$$

Корені $x_1 = -1$; $x_2 = -5$ не задовольняють ОДЗ і не задовольняють рівняння.

Відповідь. $x = \frac{2}{9}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{x} - 1$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень даного рівняння:

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 \geq 0; \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Звідси $x \geq 0$.

В ОДЗ виконується рівність $x^2 + x + 1 > x \Rightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} > \sqrt{x}$.

Рівняння розв'язку не має.

Відповідь. Коренів не має.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+7} = x-3$.

Розв'язання. Це рівняння рівносильне системі: $\begin{cases} x+7 = (x-3)^2, \\ x-3 \geq 0. \end{cases}$

$$\text{Звідси } \begin{cases} x^2 - 7x + 2 = 0, \\ x \geq 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7+\sqrt{41}}{2}, \\ x = \frac{7+\sqrt{41}}{2}, \\ x \geq 3; \end{cases}$$

$$\text{Відповідь. } x = \frac{7+\sqrt{41}}{2}.$$

Якщо для будь-якого $x \in \text{ОДЗ}$ виконуються нерівності $f(x) \geq 0; g(x) \geq 0$, то рівняння $f(x) = g(x)$ і $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}, k \in N$, рівносильні в ОДЗ. [5]

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$.

$$\text{Розв'язання. ОДЗ: } \begin{cases} 2x-5 \geq 0, \\ x+2 \geq 0, \\ 2x+1 \geq 0. \end{cases}$$

Звідси $x \geq 2,5$. Обидві частини цього рівняння в ОДЗ набувають невід'ємних значень. Тому це рівняння в ОДЗ рівносильне рівнянню:

$$(\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{2x+1})^2$$

$$\text{Звідси } 2\sqrt{2x-5}\sqrt{x+2} = 4-x;$$

$$\text{Тоді } \begin{cases} 4(2x-5)(x+2) = (4-x)^2, \\ 2,5 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \begin{cases} 7x^2 + 4x - 56 = 0, \\ 2,5 \leq x \leq 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2-6\sqrt{11}}{7}, \\ x = \frac{-2+6\sqrt{11}}{7}, \\ 2,5 \leq x \leq 4; \end{cases}$$

$$\text{Відповідь. } x = \frac{-2+6\sqrt{11}}{7}.$$

Приклад 11. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+6} - \sqrt[3]{x-2} = 2$.

Розв'язання. Позначимо $\sqrt[3]{x-2} = t, x = t^3 + 2$.

Отримаємо рівняння:

$$\sqrt{t^3+8} = t+2, t^3+8 = (t+2)^2, t_1 = -1, t_2 = 2, t_3 = -3.$$

Повертаючись до початкових змінних, отримаємо:

$$x_1 = 3, x_2 = 10, x_3 = -6.$$

$$\text{Відповідь. } x_1 = 3, x_2 = 10, x_3 = -6.$$

Приклад 15. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 2$$

Розв'язання. Виділимо під радикалами повний квадрат:

$$\sqrt{(\sqrt{x-2}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-2}-3)^2} = 2.$$

Позначимо

$$\sqrt{x-2} = z \geq 0, \text{ отримаємо рівняння } |z-1| + |z-3| = 2.$$

Розв'язуємо рівняння на інтервалах $[0; 1]$; $[1; 3]$; $[3; +\infty)$.

Звідки маємо $1 \leq z \leq 3$; тоді $3 \leq x \leq 11$.

Відповідь. $3 \leq x \leq 11$.

Приклад 17. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt[3]{(8-x)^2} + \sqrt[3]{(27+x)^2} - \sqrt[3]{(8-x)(27+x)} = 7.$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на $\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{27+x} \neq 0$. Дістанемо:

$$35 = 7 \cdot (\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{27+x}), \quad \text{або} \quad \sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{27+x} = 5.$$

Знайдене рівняння піднесемо до куба і після елементарних спрощень дістанемо:

$$\sqrt[3]{(8-x)(27+x)} = 6.$$

Знову піднесемо останнє рівняння до куба і, провівши спрощення, отримуємо рівняння:

$$x^2 + 19x = 0, \text{ звідки } x_1 = -19, x_2 = 0.$$

Відповідь. $\{-19; 0\}$.

Домашнє завдання:

Розв'язати рівняння:

1. $\sqrt{1+3x} = x+1$.
2. $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4}$.
3. $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2$.
4. $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$.

Зворотній зв'язок

E-mail vitasergiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.