12.04.2022
Група М-1
Вища математика
Урок 76-77
Тема: Екстремуми функції двох змінних

Матеріали до уроку:

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена у області D, а точка $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Означення 1. Якщо існує окіл точки M_0, що належить області D, і для всіх відмінних від M_0 точок M цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$), то точку M_0 називають ***точкою локального максимуму (мінімуму) функції*** $f(x,y)$, а число $f(M_0)$ – ***локальним максимумом (мінімумом)*** цієї функції. Точки локального максимуму та мінімуму функції називають ***точками*** її ***локального екстремуму***.

Це означення можна сформулювати іншим чином. Нехай $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Тоді $f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0) = \Delta f(x_0,y_0)$.

Означення 2. Якщо приріст функції $\Delta f(x_0,y_0) < 0$ ($\Delta f(x_0,y_0) > 0$) при всіх достатньо малих за абсолютною величиною приростах Δx і Δy, то функція $f(x,y)$ у точці $M_0(x_0,y_0)$ досягає ***локального максимуму (локального мінімуму)***.

Таким чином, у околі точки екстремуму прирости функції мають один і той же знак.

Теорема 1. (Необхідна умова екстремуму). Якщо функція $z = f(x,y)$ має у точці $M_0(x_0,y_0)$ локальний екстремум, то у цій точці частинні похідні першого порядку цієї функції дорівнюють нулю або не існують.

Доведення. Нехай $M_0(x_0,y_0)$ є точкою екстремуму. Розглянемо функцію $f(x,y_0)$, що є функцією однієї змінної x. Ця функція має екстремум у точці $x = x_0$, тому її похідна $f'_x(x_0,y_0)$ дорівнює нулю, або не існує. Аналогічно, розглянувши функцію $f(x_0,y)$ однієї змінної y, отримаємо, що $f'_y(x_0,y_0)$ дорівнює нулю, або не існує. Теорему доведено.

Аналогічна теорема справедлива для функцій n змінних.

Означення 3. Точки, у яких частинні похідні першого порядку функції $f(x,y)$ дорівнюють нулю, тобто $f'_x = f'_y = 0$, називають ***стаціонарними точками*** цієї функції. Стаціонарні точки функції $f(x,y)$ та точки, у яких її частинні похідні не існують, називають ***критичними точками*** цієї функції.

Таким чином, аналогічно функціям однієї змінної, якщо функція кількох змінних у якій-небудь точці досягає екстремуму, то це може статися лише у критичній точці, проте не всяка критична точка є точкою екстремуму. Наприклад, частинні похідні функції $z = x^2 - y^2$ дорівнюють нулю у точці $(0,0)$, $z(0,0) = 0$, проте у цій точці вказана функція екстремуму не має, тому що у досить малому околі точки $(0,0)$ вона набуває як додатних (при $|x| > |y|$), так і від'ємних (при $|x| < |y|$) значень, тобто приріст функції у цій точці змінює знак.

Приклад 1. Відкритий прямокутний басейн повинен мати об'єм V. Знайти розміри басейну, за яких на його облицювання піде найменша кількість матеріалу.

Розв'язання: Нехай x – довжина, y – ширина, z – глибина басейну. Оскільки $V = xyz$, то $z = \frac{V}{xy}$.

Кількість матеріалу, необхідного для облицювання басейну, визначається формулою $S = xy + 2yz + 2xz$ або $S = S(x,y) = xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$. Треба знайти мінімум функції $S(x,y)$ при $x > 0$, $y > 0$. Знайдемо стаціонарні точки функції $S(x,y)$. Її частинні похідні $S'_x = y - \frac{2V}{x^2}$, $S'_y = x - \frac{2V}{y^2}$. Прирівнюючи їх до нуля, отримуємо систему:

$$\begin{cases} y - \dfrac{2V}{x^2} = 0, \\ x - \dfrac{2V}{y^2} = 0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо $x = y = \sqrt[3]{2V}$. Отже, функція $S(x, y)$ має стаціонарну точку $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$. З умови задачі випливає наявність точки мінімуму, тому у стаціонарній точці ця функція досягає мінімуму. Глибина басейну $z = \frac{V}{xy} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$. Таким чином, мінімальна кількість матеріалу буде витрачена при розмірах басейну $x = y = \sqrt[3]{2V}$, $z = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$.

Теорема 2. (Достатня умова екстремуму функції двох змінних). Нехай у стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$ і у деякому її околі функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Нехай $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$. Тоді, якщо $\Delta = AC - B^2 > 0$, то у точці M_0 функція $f(x, y)$ має екстремум, причому він є максимумом, якщо $A < 0$ і мінімумом – при $A > 0$. При $\Delta < 0$ функція $f(x, y)$ у точці M_0 екстремуму не має.

Доведення. Формула Тейлора для функції двох змінних при $n = 1$ після розкриття виразів для диференціалів набуває вигляду:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \frac{1}{2}(f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x^2 +$$
$$+2 f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y^2).$$

Для стаціонарної точки $M_0(x_0, y_0)$ $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$, тому остання формула у околі точки M_0 має вигляд:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x\Delta y +$$
$$+ f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y^2).$$

У випадку мінімуму для довільних достатньо малих значень $|\Delta x|$ та $|\Delta y|$ права частина цієї рівності повинна бути додатною, а у випадку максимуму – від'ємною. Внаслідок неперервності других частинних похідних для цього достатньо, щоб диференціал другого порядку у точці M_0 зберігав свій знак для малих значень $|\Delta x|$ та $|\Delta y|$. Запишемо вираз для цього диференціала:

$$d^2F(M_0)=f''_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+f''_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2.$$

Нехай $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$, $\Delta=AC-B^2$. Позначимо через φ кут між віссю Ox та відрізком M_0M довжиною ρ, де M – точка з координатами $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Тоді $\Delta x=\rho\cos\varphi$, $\Delta y=\rho\sin\varphi$, при $A\neq 0$ маємо:

$$d^2f(M_0)=A\rho^2\cos^2\varphi+2B\rho^2\sin\varphi\cos\varphi+C\rho^2\sin^2\varphi=$$

$$=\frac{\rho^2}{A}\left[(A\cos\varphi+B\sin\varphi)^2+(AC-B^2)\sin^2\varphi\right]=$$

$$=\frac{\rho^2}{A}\left[(A\cos\varphi+B\sin\varphi)^2+\Delta\cdot\sin^2\varphi\right].$$

Домашнє завдання:

Зробити конспект

Зворотній зв'язок

E-mail vitasergiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.