13.01.2022
Група 33
Математика (алгебра)
Урок 47-48
Тема: Повторення. Розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей
Мета: Формування в учнів умінь розв’язувати тригонометричні рівняння та нерівностей способом:

- заміни змінних;
- зведення до однієї тригонометричної функції з однаковим аргументом;
- розкладанням на множники;
- введення допоміжного кута;
- зведення до однорідного рівняння.

Розвивати логічне мислення, уяву, пам'ять, виховувати інтерес до математики, уважність, відповідальність, культуру математичних записів, позитивне ставлення до навчання.

Матеріали до уроку:

Розв’язування рівнянь

1) Заміна змінних при розв’язуванні тригонометричних рівнянь

Сьогодні ми навчимось розв’язувати складніші тригонометричні рівняння, які шляхом поточних перетворень можна звести до рівнянь з однією тригонометричною функцією, потім зробити заміну і звести до алгебраїчного рівняння.

Приклад 1. Розв’язати рівняння

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

В ході пояснення задаю питання учням, спонукаю до спільного обговорення розв’язку, учні записують розв’язання у зошит.

Розв’язання.

Введемо нову змінну $t = \sin x$.

Оскільки sin x – функція обмежена, то $t \in [-1;1]$

Тоді дане рівняння буде мати вигляд $2t^2 + t - 1 = 0$.

Розв’яжемо його: $D = 1 + 8 = 9$, $t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$.

Тому, $\sin x = \frac{1}{2}$ або $\sin x = -1$.

1) $\sin = \frac{1}{2}$,

$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$,

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$.

2) $\sin x = -1$,

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$.

Відповідь: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$.

2) Розв’язування тригонометричних рівнянь зведенням до однієї функції (з однаковим аргументом).

Приклад 2. Розв’язати рівняння

$$6\sin^2 x + 5\cos x - 2 = 0$$

Обговорюється хід розв’язування рівняння, проектується розв’язання, записують у

зошит.

Замінимо $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$ і отримаємо квадратне рівняння відносно $\cos x$.

$6(1-\cos^2 x)+5\cos x-2=0$,

$-6\cos^2 x+5\cos x+4=0$,

$6\cos^2 x-5\cos x-4=0$.

Нехай $\cos x=t$, $t\in[-1;1]$, тоді $6t^2-5t-4=0$, $t_1=-0{,}5$, $t_2=\frac{4}{3}$ - сторонній корінь. Отже,

$\cos x=-0{,}5$,

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

Відповідь: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

Алгоритм розв'язування рівнянь зведенням до однієї функції (з однаковим аргументом).

1. Спробувати всі тригонометричні функції звести до одного аргументу.
2. Якщо вдалося звести до одного аргументу, то спробувати всі тригонометричні вирази звести до однієї функції.
3. Зробити заміну.
4. Звести рівняння до квадратного.
5. Розв'язати квадратне рівняння.
6. Повернутись до заміни і розв'язати утворені рівняння.
7. Записати відповідь.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $tgx+2ctgx=3$

Чи можна це рівняння записати відносно однієї тригонометричної функції? Виконайте це.

Чи можна це рівняння записати у вигляді квадратного рівняння відносно однієї змінної?

Розв'яжіть рівняння, перевірте правильність виконання, виправте помилки.

Розв'язання. Оскільки $ctgx=\frac{1}{tgx}$, то рівняння можна записати у вигляді

$tgx+\frac{2}{tgx}=3$.

Позначимо $tgx=t$. Отримаємо рівняння $t+\frac{2}{t}=3$, яке зводиться до квадратного

$t^2-3t+2=0, t\neq 0.$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=2, \\ t_2=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=2 \\ tgx=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=arctg\,2+\pi n, n\in Z \\ x_2=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{arctg\,2+\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi k, n,k\in Z\right\}$.

3) Розв'язання тригонометричних рівнянь за допомогою розкладання на множники.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\sin^3 x\cos x-\sin x\cos^3 x=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Розв'язання. У лівій частині рівняння винесемо за дужки спільний множник і

застосуємо формули подвійного кута: $\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)=\frac{\sqrt{2}}{8}$,

$\frac{1}{2}\sin 2x(-\cos 2x)=\frac{\sqrt{2}}{8}$,

$-\frac{1}{4}\sin 4x=\frac{\sqrt{2}}{8}$,

$\sin 4x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$4x=(-1)^k(-\frac{\pi}{4})+\pi k$, $k\in Z$;

$x=\frac{\pi}{16}(-1)^{k+1}+\frac{\pi}{4}k$, $k\in Z$.

Відповідь: $x\in\left\{\frac{\pi}{16}(-1)^{k+1}+\frac{\pi}{4}k, k\in Z\right\}$.

4) Однорідні тригонометричні рівняння.

Якщо всі члени рівняння у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної) мають однаковий сумарний степінь, то рівняння називається однорідним. Розв'язують однорідне рівняння діленням на найвищий степінь однієї змінної.

Зауваження. Дотримуючись цього орієнтира, доводиться ділити обидві частини рівняння на вираз зі змінною. При цьому можлива втрата коренів, якщо коренями є числа, при яких дільник дорівнює нулю. Щоб уникнути втрати коренів, необхідно окремо розглянути випадок, коли вираз, на який ми збираємось ділити обидві частини рівняння, дорівнював нулю, і лише після цього виконувати ділення на вираз що не дорівнює нулю.

Розглянемо рівняння виду $a\sin x+b\cos x=0$ (однорідне рівняння 1-го степеня), де a і b не дорівнюють нулю. Значення x, при яких cos x дорівнює нулю, не задовольняє даному рівнянню, бо тоді і sin x теж дорівнював би нулю, а cos x і sin x не можуть одночасно дорівнювати нулю. Тому можна розділити обидві частини рівняння почленно на cos x. Маємо: $\frac{a\sin x}{\cos x}+\frac{b\cos x}{\cos x}=0$, $atgx+b=0$, $tgx=-\frac{b}{a}$.

Розв'язавши дане тригонометричне рівняння отримуємо корені.

Рівняння виду

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$$

називається однорідним рівнянням 2-го степеня.

Якщо числа a, b, c не дорівнюють нулю, то розділимо дане рівняння на $\cos^2 x$ (або на $\sin^2 x$). (У даному рівнянні $\cos^2 x\neq 0$, бо в супротивному випадку $\sin^2 x=0$, а cos x і sin x не можуть одночасно дорівнювати нулю). Тоді

$$\frac{a\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{b\sin x\cos x}{\cos^2 x}+\frac{c\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$$

$$atg^2x+btgx+c=0.$$

Розв'язавши отримане, рівняння одержимо корені даного рівняння.

Приклад 5. Розв'язати на дошці, коментуючи кожен крок. Залучати студентів до обговорення.

$3\sin^2 x+\sin x\cos x=2\cos^2 x$

ОДЗ: $\cos x\neq 0$

$3\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$ ділимо на $\cos^2 x$

$3tg^2 x + tgx - 2 = 0$

Заміна $tgx = t$, $3t^2 + t - 2 = 0$, $D = 25$, $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{2}{3}$.

$$\left[\begin{array}{l} tgx = -1, \\ tgx = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \\ x_2 = arctg\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = \left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n, arctg\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z\right\}$.

5. Метод введення допоміжного кута.

Розглянемо рівняння виду asinx + bcosx = c. Очевидно, що $a^2 + b^2 \neq 0$.

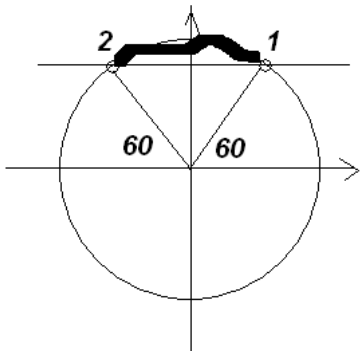
Поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{a^2+b^2}$ і покладемо $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$ та

$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$, маємо рівняння $\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, або $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Отже, дістали просте тригонометричне рівняння яке має розв'язки за умови $-1 \le \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1$.

Розв'язування нерівностей

1. $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$;



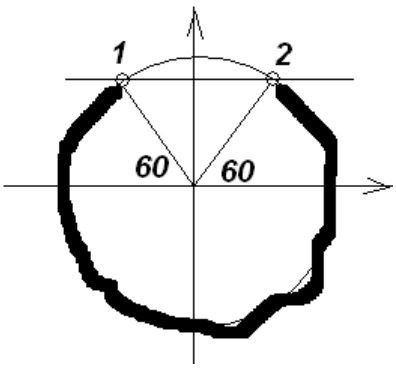
$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}85$ 1. $0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **2.** $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$$

2. $\sin(3x - \frac{\pi}{6}) \le \frac{\sqrt{3}}{2}$;



$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}85$ 1. $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **2.** $2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 3x - \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

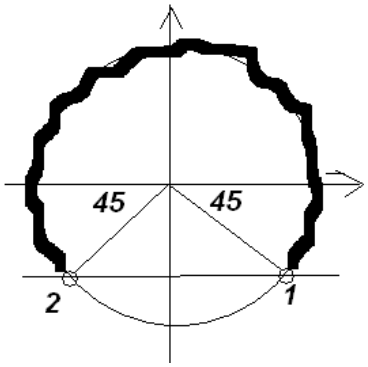
$$\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{15\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} n, n \in Z$$

3. $2\sin(4x + \frac{\pi}{5}) > -\sqrt{2}$;

$\sin(4x + \frac{\pi}{5}) > \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$ 1. $0-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$

$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **2.** $\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$



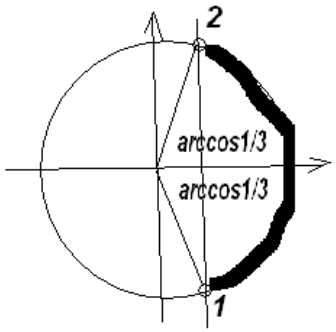
$$-\frac{\pi}{4}+2\pi n<4x+\frac{\pi}{5}<\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$$

$$-\frac{9\pi}{80}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{21\pi}{80}+\frac{\pi n}{2} n, n\in Z$$

4. $\cos(-3x)>\frac{1}{3}$;

1. $0-\arccos\frac{1}{3}=-\arccos\frac{1}{3}$

2. $0+\arccos\frac{1}{3}=\arccos\frac{1}{3}$



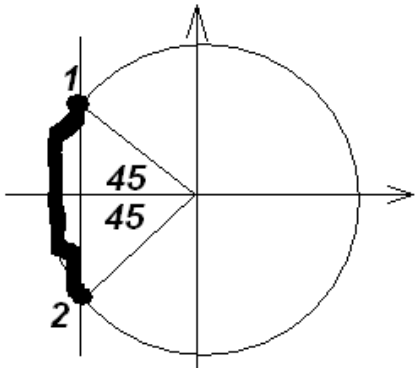
$$-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n<-3x<\arccos\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z$$

$$-\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{3}-\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{3}-\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$$

5. $\cos(2x+\frac{\pi}{4})\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7$ 1. $\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **2.** $\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$



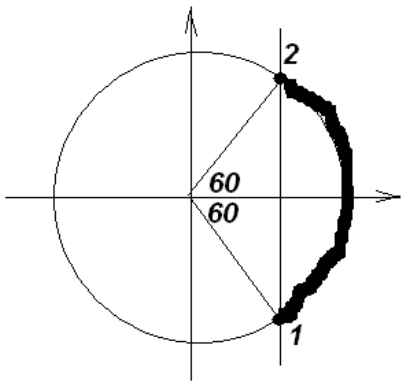
$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n<2x+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$$

$$\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$$

6. $2\cos(x-\frac{\pi}{6})\ge 1$;

$\cos(x-\frac{\pi}{6})\ge\frac{1}{2}$ 1. $0-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ **2.** $0+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

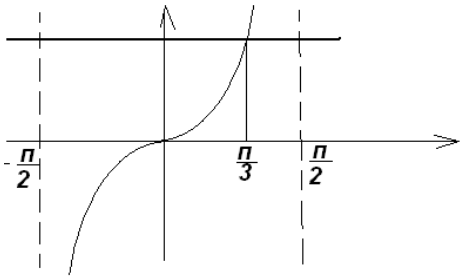


$$-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$$

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$$

7. $tg(-\frac{x}{4})<\sqrt{3}$;

$tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$



$$-\frac{\pi}{2}+\pi n<\frac{-x}{4}<\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$$

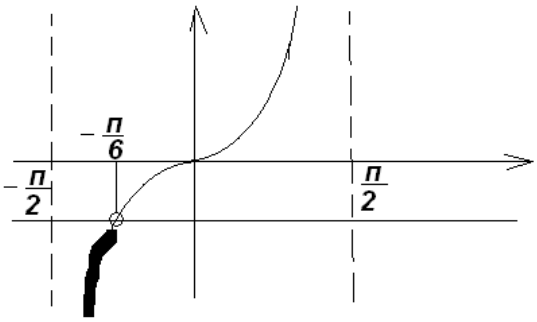
$$-\frac{4\pi}{3}-4\pi n<x<2\pi-4\pi n, n\in Z$$

8. $tg\,2x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

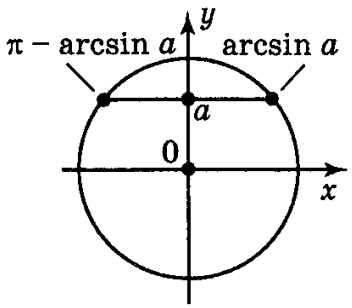
$tg(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$-\frac{\pi}{2} + \pi n < 2x < -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

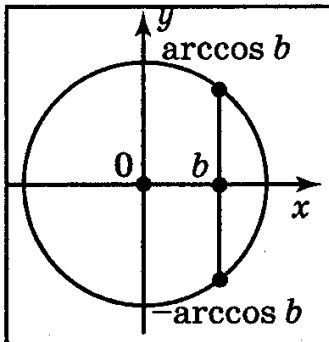
$-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < x < -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$



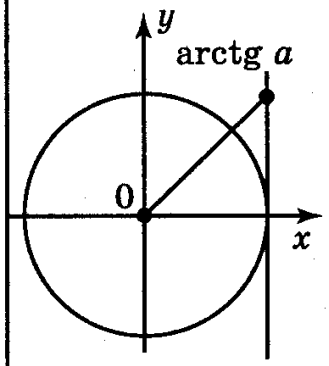
Тригонометричні нерівності



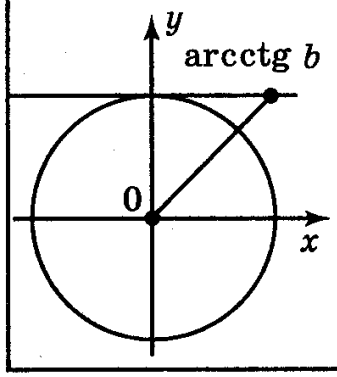
	$a < -1$	$-1 \le a \le 1$	$a > 1$
$\sin t > a$	$t \in R$	$\arcsin a + 2\pi n \le t \le \pi - \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$	розв'язків немає
$\sin t < a$	не має розв'язків	$-\pi - \arcsin a + 2\pi n \le t \le \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$	$t \in R$



	$b < -1$	$-1 \le b \le 1$	$b > 1$
$\cos t > b$	$t \in R$	$-\arccos b + 2\pi n \le t \le \arccos b + 2\pi n$, $n \in Z$	не має розв'язків
$\cos t < b$	не має розв'язків	$\arccos b + 2\pi n \le t \le 2\pi - \arccos b + 2\pi n$, $n \in Z$	$t \in R$



$tg\,t > a$	$\operatorname{arctg} a + \pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$
$tg\,t < a$	$-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$



$ctg\,t > b$	$\pi n < t < \operatorname{arcctg} b + \pi n,\ n \in Z$
$ctg\,t < b$	$\operatorname{arcctg} b + \pi n < t < \pi + \pi n,\ n \in Z$