

20.04.2022

Група 33

Математика (алгебра)

Урок 49-51

Тема: Повторення. Розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей

Мета: Формування в учнів умінь розв'язувати тригонометричні рівняння та нерівностей способом:

- заміни змінних;
- зведення до однієї тригонометричної функції з однаковим аргументом;
- розкладанням на множники;
- введення допоміжного кута;
- зведення до однорідного рівняння.

Розвивати логічне мислення, уяву, пам'ять, виховувати інтерес до математики, уважність, відповіальність, культуру математичних записів, позитивне ставлення до навчання.

Матеріали до уроку:

Розв'язування рівнянь

Переходимо до пояснення розв'язків складних тригонометричних рівнянь. Тут маємо приклади де аргумент в тригонометричній функції знаходиться під коренем або в квадраті, також рівняння де аргумент або сама функція містяться під модулем. Кожен з прикладів вимагає іншого підходу при зведенні рівнянь до найпростішого типу. Водночас на подібних прикладах Ви швидко навчитесь розписувати складні завдання та знатимете яку зі схем застосовувати.

Приклад 18.13 Розв'язати рівняння $\cos^2(x) + 5\cos(x) - 6 = 0$.

A	B	V	G	D
$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pm \arccos 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$ $x = \pm(\pi - \arccos 6) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Розв'язання: З вигляду тригонометричного рівняння робимо висновок, що через заміну змінних його слід звести до квадратного рівняння.

Зробимо заміну $\cos(x) = t$, причому змінна має відповідати області визначення косинуса $-1 \leq t \leq 1$. В такий спосіб прийдемо до квадратного рівняння $t^2 + 5t - 6 = 0$.

За теоремою Вієта знаходимо: $t_1 = 1$ і $t_2 = -6 < -1$ (не задовільняє умові).

Отже, отримали $\cos(x) = 1$, звідси корінь рівний

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Відповідь: Д.

Приклад 18.15 Розв'язати рівняння $\sin(x^2) = 0$.

A	B	V	G	D
$\sqrt{\pi n}, n \in \mathbb{N}$	0	$\{0\} \cup \{\sqrt{2\pi n}, n \in \mathbb{N}\}$	$-\sqrt{2\pi n}, n \in \mathbb{N}$	$\{0\} \cup \{\pm\sqrt{\pi n}, n \in \mathbb{N}\}$

Розв'язання: Аргумент під синусом міститься в другому степені, тому з правої частини потрібно буде знаходити корінь квадратний.

Запишемо розв'язок рівняння

$$\sin x^2 = 0, x^2 = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

звідси $x = \pm\sqrt{\pi n}, n \in \mathbb{N}$, а також 0, оскільки раніше номер пробігав множину цілих чисел (тепер натуральних).

Остаточно отримаємо множину коренів

$$x = \{0\} \cup \{\pm\sqrt{\pi n}, n \in \mathbb{N}\}$$

Відповідь: Д.

Приклад 18.18 Розв'язати рівняння $\cos(\cos(x))=1$.

A	Б	В	Г	Д
\emptyset	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pm \arccos(2\pi n) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pm \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Маємо косинус від косинуса в лівій частині та одиницю в правій.

Розкриваємо зовнішній косинус

$$\cos(\cos x) = 1, \cos x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Далі виписуємо обмеження на ОДЗ внутрішнього косинуса

$$\begin{cases} 2\pi k > 1 \\ 2\pi k < -1 \end{cases}$$

при $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (без нуля).

Потрібних номерів k щоб виконувались нерівності немає, тому розглянемо єдиний випадок:

$$k=0, \text{ тоді } \cos(x)=0, \text{ звідси } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Відповідь: Б.

Приклад 18.19 Розв'язати рівняння $\sin(x) + \sin(|x|) = 0$.

A	Б	В	Г	Д
$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$	0	$(-\infty; 0]$	$(-\infty; 0] \cup \{\pi n, n \in \mathbb{N}\}$	$(-\infty; 0] \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}$

Розв'язання: Маємо тригонометричне рівняння з синусами, один з аргументів в якому взятий по модулю.

Для обчислень замінююмо наведене р-ня системою рівнянь для різних значень аргументу

$$\sin x + \sin|x| = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x + \sin x = 0 & x > 0 \\ \sin x - \sin x = 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Далі рівняння розв'язуємо:

$$\begin{cases} 2\sin x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{N} \\ x \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

Сукупність розв'язків заданого рівняння має вигляд:

$$x \in (-\infty, 0] \cup \{\pi n, n \in \mathbb{N}\}$$

Відповідь: Г.

Тригонометричні рівняння з параметром одні з важчих в курсі тригонометрії. При розкритті таких рівнянь потрібно враховувати область допустимих значень тригонометричних функцій, а також застосовувати весь багаж формул, щоб перетворити рівняння до простого типу.

Прикладі, що далі наведені входять в збірники з підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.

Приклад 18.21 За якого найменшого значення параметра a рівняння $2\cos(4x)=a-5$ має корені?

A	Б	В	Г	Д
-3	0	3	1	-1

Розв'язання: Рівняння з параметрами одні з найважчих, і це стосується не тільки курсу тригонометрії.

Тому їх слід розписувати уважно та враховувати всі можливі обмеження.

Запишемо р-ня $2\cos(4x)=a-5$ у вигляді $\cos(4x)=(a-5)/2$.

Згідно з обмеженнями на область допустимих значень функції косинус, задане тригонометричне рівняння матиме корені, якщо параметр лежатиме в інтервалі

$$-1 \leq \frac{a-5}{2} \leq 1$$

Розв'яжемо отриману систему нерівностей:

$$-1 \leq \frac{a-5}{2} \leq 1 \rightarrow -2 \leq a-5 \leq 2 \rightarrow$$

$$-2+5 \leq a-5+5 \leq 2+5 \rightarrow 3 \leq a \leq 7$$

Отже, при $a[\min]=3$ рівняння $2\cos(4x)=a-5$ має корені.

Відповідь: В.

Приклад 18.22 Знайти всі значення параметра a , за яких рівняння $(a+2)\sin(x)=a^2-4$ має корені.

A	B	V	G	D
$a \in (1; 3)$	$a \in \mathbb{R}$	$a \neq 2$	$a \in \{-2\} \cup [1; 3]$	\emptyset

Розв'язання: Розпишемо праву частину рівняння з параметром за формулою різниці квадратів

$$(a+2)\sin x = a^2 - 4 \rightarrow (a+2)\sin x = (a+2)(a-2)$$

Очевидно, що при $a=-2$ рівняння матиме безліч коренів, оскільки маємо тотожність $0=0$.

Розглянемо випадок:

$$\sin(x) = a-2.$$

З обмежень на область допустимих значень функції синус виписуємо умову, що параметр повинен знаходитися в межах $-1 \leq a-2 \leq 1$.

Спрощуємо систему нерівностей:

$$-1 \leq a-2 \leq 1 \rightarrow$$

$$-1+2 \leq a-2+2 \leq 1+2 \rightarrow$$

$$1 \leq a \leq 3$$

Отримали, що при $a \in \{-2\} \cup [1; 3]$ тригонометричне рівняння $(a+2)\sin(x)=a^2-4$ має корені.

Відповідь: Г.

Розв'язування нерівностей

Тригонометричні нерівності зі складним аргументом за методом розв'язування не надто відрізняються від простих тригонометричних нерівностей, на початку виконуємо заміну змінних, далі розв'язуємо нерівність. Далі повертаємося до заміни змінних, щоб врахувати складний аргумент. Далі будуть наведені готові відповіді до тригонометричних нерівностей, які потрібно вміти розв'язувати при проходження зовнішнього незалежного оцінювання та вступі у ВУЗи на факультети з математичними дисциплінами.

Завдання 19.9 Розв'язати нерівність $\cos(2x) \geq -\sqrt{2}/2$.

Розв'язання: Спершу виконуємо перевірку чи права частина нерівності відповідає області допустимих значень косинуса.

Оскільки умова $-\sqrt{2}/2 \leq 1$ виконується, то розв'язок нерівності існує.

Зробимо заміну змінних: $t=2x$ та перейдемо до обчислень

простішої нерівності

$$\cos(t) \geq -\sqrt{2}/2.$$

Графічний метод, що ілюстрували для найпростіших тригонометричних нерівностей тут наводити не будемо.

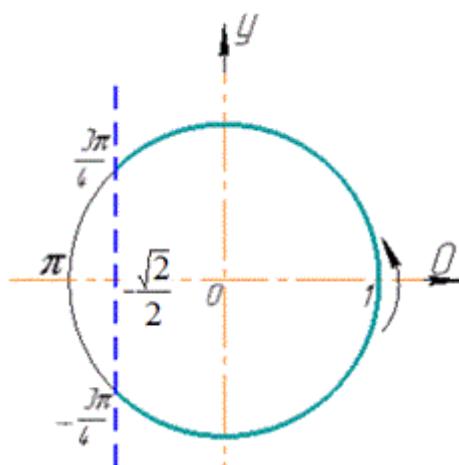
Всі хто зацікавлені можуть переглянути попередню статтю.

Далі у всіх прикладах обчислення проміжків виконання нерівності будемо виконувати на одиничному колі.

Для цього в декартової системі координат будуємо одиничне коло та пряму $y = -\sqrt{2}/2$, що є константою в правій частині за знаком нерівності.

Далі позначаємо точки P_1 і P_2 перетину одиничного кола й зазначеної прямої та виділимо множину точок (виділено синім на графіку), ординати яких **не менші** $-\sqrt{2}/2$.

Не менші, тому що нерівність нестрога і всі значення косинуса мають бути більші або рівні $-\sqrt{2}/2$. Знайдемо значення t_1 і t_2 , здійснюючи обхід дуги кола проти годинникової стрілки:



$t_1 < t_2$,

$$t_1 = 0 - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4};$$

$$t_2 = 0 + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Далі врахуємо, що період косинуса рівний 2π та записуємо розв'язок нерівності у вигляді проміжків

$$t \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$$

або двосторонньої нерівності

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Повернемося до заміни $t=2x$, щоб перерахувати кути

$$-\frac{3\pi}{4} + \pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Остаточно, отримаємо

$$-\frac{3\pi}{8} + \pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

(поділили кожну частину нерівності на 2).

Множиною розв'язків нерівності є точки

$$x \in \left[-\frac{3\pi}{8} + \pi k, \frac{3\pi}{8} + \pi k\right]$$

Завдання 19.10 Розв'язати нерівність $\sin(3x) \geq \sqrt{2}/2$.

Розв'язання: Перевіряємо ОДЗ синуса: $|\sqrt{2}/2| \leq 1$, отже нерівність має розв'язок.

Робимо заміну змінних: $t=3x$.

Після заміни нерівність спроститься до наступної:

$$\sin(t) \geq \sqrt{2}/2.$$

Будуємо одиничне коло, пряму $y=\sqrt{2}/2$.

Позначаємо точки перетину одиничного кола й зазначененої прямої та виділяємо множину точок, ординати яких не менші $\sqrt{2}/2$.

Знайдемо значення t_1 і t_2 , виконуючи обхід дуги проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2$,

$$t_1 = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

$$t_2 = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Обхід слід виконувати проти годинникової стрілки, тому що в цьому напрямку зростає градусна міра кута від 0 до 2π .

Якщо цього не робити, то у Вас вийде, що початковий кут є більшим за кінцевий, що неможливо.

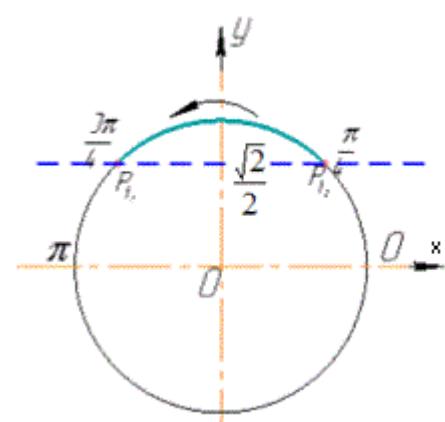
Додаємо період синуса 2π та записуємо множину розв'язків нерівності через проміжки

$$t \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$$

та у вигляді нерівності

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Повертаємося до заміни змінних $t=3x$ та перераховуємо розв'язки



$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq 3x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Остаточно, отримаємо нерівність

$$\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

(поділили кожну частину нерівності на 3).

Шукана множина розв'язків прийме вигляд:

$$x \in \left[\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \right]$$

Завдання 19.11 Розв'язати нерівність $\sin(x/4 - 1) \leq -\sqrt{2}/2$.

Розв'язання: Оскільки $|\sin(\theta)| \leq 1$, то розв'язок нерівності існує.

Зробимо заміну: $t = x/4 - 1$, тоді переходимо до обчислень простішої нерівності $\sin(t) \leq -\sqrt{2}/2$.

Побудуємо одиничне коло, пряму $y = -\sqrt{2}/2$.

Позначимо точки $P[t1]$ і $P[t2]$ перетину кола й прямої $y = -\sqrt{2}/2$ та виділимо множину точок, ординати яких не більші $-\sqrt{2}/2$.

Зайдемо кути перетину прямої з колом $t1$ і $t2$:

$$t_1 < t_2, \quad t_1 = -\pi + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

$$t_2 = \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\pi}{4}$$

Враховуючи періодичність синуса, записуємо розв'язок через проміжки

$$t \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z}$$

або нерівності

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Повернемося до заміни $t = x/4 - 1$, та визначимо "ікс"

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq \frac{x}{4} - 1 \leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 - \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq \frac{x}{4} \leq 1 - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

Остаточно, отримаємо

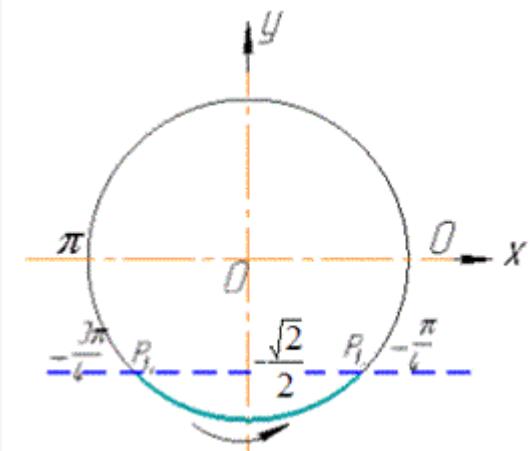
$$4 - 3\pi + 8\pi k \leq x \leq 4 - \pi + 8\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

(До всіх частин нерівності додали 1, а потім помножили на 4).

Отже, значення

$$x \in [4 - 3\pi + 8\pi k; 4 - \pi + 8\pi k]$$

є множиною розв'язків тригонометричної нерівності.



Домашнє завдання:

Зробити конспект

Зворотній зв'язок

E-mail vitasergiiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.