

21.04.2022

Група М-2

Вища математика

Урок 105-106

Тема: Знакозмінні ряди

Матеріали до уроку:

Окрім знакододатних рядів на практиці зустрічаються знакозмінні та знакопочергові ряди. Про них і піде мова в даній статті.

Ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

називається знакозмінним, якщо частина його членів приймає додатні значення, а решта - від'ємні. Знакопочерговим називається ряд, сусідні члени якого мають протилежні знаки. У випадку, коли перший член знакопочергового ряду додатний, його можна подити у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2k+1} - a_{2k+2} + \dots, (a_n > 0, n \in N).$$

Ознака Лейбніца

Для дослідження збіжності ряду використовують ознаку Лейбніца: якщо члени знакопочергового ряду спадають по абсолютної величині та границя загального члена ряду рівна нулю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

то ряд збіжний. При цьому сума ряду не перевищує значення його першого члена, якщо він додатній.

Для знакозмінного ряду існують поняття абсолютної та відносної збіжності.

Знакозмінний (знакопочережний) ряд збіжний абсолютно, якщо цей ряд та ряд утворений з модулів членів цього ряду збіжні одночасно.

Ряд називають умовно або неабсолютно збіжним у випадках, коли збіжний лише знакозмінний ряд, а ряд складений з абсолютнох величин членів ряду розбігається.

Дослідження рядів на збіжність

Приклад 1. Дослідити які ряди збігаються абсолютно, умовно чи розбігаються

$$1) (9.131) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}};$$

Розв'язок. Даний ряд знакопочережний, а також кожен наступний член по модулю менший за попередній

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+2}} > \frac{1}{\sqrt{n+3}}.$$

Знайдемо границю загального члена ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0.$$

За ознакою Лейбніца ряд збіжний. Перевіримо ряд складений з модулів членів на абсолютно збіжність. **Застосуємо ознаку Даламбера**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = 1.$$

Дана ознака відповіді не дає. **Застосуємо інтегральну ознакою Коши**

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Ряд розбіжний, інтеграл рівний безмежності.

Оскільки знакопочережний ряд збіжний, а ряд з модулів розбіжний, то роглянутий ряд відносно збіжний.

$$2) (9.132) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2};$$

Розв'язок. Кожен наступний член ряду по модулю менший за попередній

$$\frac{1}{(2n-1)^2} > \frac{1}{(2n+1)^2} > \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Границя загального члена рівна нулеві

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 0.$$

Ознака Лейбніца виконується.

Перевіримо ряд на абсолютно збіжність. Застосуємо інтегральну ознако Коші

$$3) (9.133) \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(2x-1)^2} = -\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2(2x-1)} \Big|_1^b = 0 + \frac{1}{2} = 0,5.$$

Вона підтверджує збіжність ряду. Вихідний **ряд абсолютно збіжний**.

$$4) (9.134) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n+1};$$

Розв'язок. Необхідна ознака збіжності не виконується, оскільки кожен наступний член ряду по модулю більший за попередній

$$\frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2n+3} < \frac{n+2}{2n+5}.$$

За ознакою Лейбніца ряд розбігається.

$$4) (9.134) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)\sqrt{2n+1}};$$

Розв'язок. Члени ряду по модулю спадають

$$\frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}} > \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n+3}} > \frac{1}{(2n+3)\sqrt{2n+5}}.$$

Обчислюємо границю u_n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{1}{n}\right) \sqrt{2 + \frac{1}{n}}} = 0.$$

Границя рівна нулю, отже ряд збіжний за ознакою Лейбніца.

Перевіримо на абсолютно збіжність. З вигляду бачимо, що ознака Делабера нічого не дасть.

Застосуємо інтегральну ознако Коші. Після заміни змінних під інтегралом отримаємо гіперболічний арктангенс, який на межах інтегрування приймає обмежене значення

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{2x+1}} = \begin{cases} 2x+1=t^2 \\ dx=t dt \end{cases} =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\sqrt{3}}^b \frac{udu}{u(u^2 - 2)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctanh} \left(\frac{t\sqrt{2}}{2} \right) \Big|_1^\infty =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{6} + 2}{\sqrt{6} - 2} \approx 0,81.$$

Даний ряд збіжний ($\text{Integral}=0,81$). Отже ряд абсолютно збіжний.

Приклад 2. Дослідити знакочережний ряд на збіжність.

a) $1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots$

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$$

Маємо

Нехай $c_n = 1/n^4$. Досліджувати цей ряд будемо за ознакою Лейбніца:

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ збігається, якщо границя n -го члена рівна нулю $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ і $c_{n > c_{n+1}} > 0$.

Перевірка показує, що умови виконуються

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\infty^4} = \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{2^4} > \frac{1}{3^4} > \frac{1}{4^4} > \dots > 0$$

звідси слідує, що ряд $1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots$ збігається.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

Досліджувати цей ряд будемо за ознакою Лейбніца:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{\ln 4} > \dots > 0$$

$$\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{\ln 4} > \dots > 0$$

звідси слідує, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ збігається, але умовно, бо ряд складений за

модулем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ розбіжний.

Абсолютна та умовна збіжність

Теорема (Коші): Якщо ряд із модулів членів ряду збіжний $|u_n|$, то знакозмінний ряд також збіжний.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad (a_n > 0)$$

Означення 1: Знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним, якщо збіжний ряд складений із модулів членів знакозмінного ряду.

Означення 2: Якщо ряд складений із модулів знакозмінного ряду розбіжний, а сам знакозмінний ряд збіжний, то така збіжність називається умовою, а ряд умовно збіжним.

Приклади дослідження збіжності ряду

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Розв'язування: Даний ряд є знакозмінним рядом, кожен його наступний член по модулю $1/n < 1/(n+1) < \dots$ менший за попередній, границя при номері прямуочому до безмежності прямує до нуля.

1) $\frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

За ознакою Лейбніца знакозмінний ряд збіжний, хоча ряд складений із модулів представляє собою

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

гармонійний ряд, який розбіжний, тому досліджений ряд умовно збіжний.

Приклад 2. Дослідити ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$$

Розв'язування: Перевіряємо необхідні умови збіжності ряду

1) $a_n > a_{n+1}, n \in N$

$$\frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1} \rightarrow (n+1)^2 > n(n+2) \rightarrow$$

$$n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n \rightarrow 1 > 0$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$

Перша умова виконується – члени ряду з модулів монотонно спадають. Однак границя модуля загального члена ряду не прямує до нуля при прямуванні номера до безмежності, тому ряд за ознакою Лейбніца розбіжний.

Приклад 3. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{8n-1}$$

Розв'язування: Ряд монотонно спадає $1/7 > 2/15 > 3/23 > \dots$

Перша з необхідних умов збіжності знакозмінного ряду виконується.

Обчислимо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{8n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{8} \neq 0$$

За ознакою Лейбніца ряд розбіжний, границя n -го члена по модулю не прямує до нуля при номері прямуочому до безмежності.

Приклад 4. Дослідити на умовну та абсолютно збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}$$

Розв'язування: 1) Легко переконатися, що кожний наступний член ряду по

модулю $1/(n \cdot 3^n)$ менший за попередній.

$1/3 > 1/18 > 1/243 \dots$

2) Для визначення абсолютної збіжності ряду застосуємо ознаку Даламбера

$$|a_n| = \frac{1}{n \cdot 3^n}, |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{(1+\frac{1}{n}) \cdot 3 \cdot 3^n} = \frac{1}{3} < 1$$

Границя відношення сусідніх членів ряду за модулем менша одиниці, отже ряд складений з модулів за ознакою Даламбера збіжний.

Звісі слідує, що заданий знакозмінний ряд абсолютно збіжний.

Приклад 5. Дослідити ряд збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\ln^n 10}$$

Розв'язування: В залежності від n синус приймає як від'ємні так і додатні значення, тому даний ряд є знакозмінним.

Оцінимо загальний член ряду по модулю

$$\frac{|\sin(n)|}{\ln^n 10} \leq \frac{1}{\ln^n 10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{\ln^n 10}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{\ln^n 10}$ збіжний, як геометричний ряд $1/q^n$ з основою $q = 1/\ln 10 < 1$.

Оскільки ряд із модулів збіжний за ознакою ознаки порівняння, то заданий ряд збіжний, причому абсолютно.

Приклад 6. Довести, що ряд збіжний умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n}}$$

Розв'язування: Легко переконатися, що члени ряду за модулем спадають.

Границя загального члена ряду за модулем прямує до нуля

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} = 0$$

тому за ознакою Лейбніца ряд збіжний.

Ряд складений із модулів заданого ряду із загальним членом $a_n = 1/n^{1/5}$ є рядом Діріхле зі степенем $p = 1/5 < 1$, тому він є розбіжним. Якщо абсолютно ряд розбіжний, а знакозмінний ряд збіжний, то він збіжний умовно, що і слід було довести.

Як висновок з цього прикладу, можна вказати, що всі знакозмінні ряди, які за модулем можна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

порівняти з рядом Діріхле вигляду будуть абсолютно збіжними, якщо $p > 1$.

Тобто, якщо ряд з модулів спадає трохи швидше за гармонічний ряд $a_n = 1/n$ то такий знакозмінний ряд абсолютно збіжний.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$$

Приклад 7. Довести збіжність ряду

Розв'язування: Кожний наступний член ряду складеного з модулів менший за попередній $1/e > 1/e^2 > 1/e^3 \dots$

Границя n -го члена ряду прямує до нуля

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

тому за ознакою Лейбніца знакозмінний ряд збіжний.

Для дослідження на абсолютно збіжність застосуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e^n}} = \frac{1}{e}$$

Зауважте, що вона ефективна лише у випадках коли члени ряду можна представити як певну скінченну величину в степені n .

Оскільки одиниця розділити на експоненту менша за одиницю $1/e < 1$, то границя менша одиниці, отже абсолютний ряд збіжний.

Звідси слідує, що знакозмінний ряд абсолютно збіжний.

Приклад 8. Дослідити на абсолютно збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n}{(2n+1)^n}$$

Розв'язування: Бачимо, що ряд з модулів монотонно спадає

$$1 > 9/25 > 81/343 > \dots$$

Зайдемо границю на нескінченності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{(2n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{(2n)^n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n^n e^2} = 0$$

Тут частину знаменника звели під другу чудову границю $= e$.

Для перевірки на абсолютно збіжність застосуємо ознаку Даламбера

$$|\alpha_n| = \frac{3^n}{(2n+1)^n}, |\alpha_{n+1}| = \frac{3^{n+1}}{(2n+3)^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(2n+3)^{n+1}}}{\frac{3^n}{(2n+1)^n}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^n}{(2n+3)^n \cdot (2n+3)} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+3)} = 0$$

Аналогічний результат отримаємо за радикальною ознакою Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[n]{2n+1}} = 0$$

Абсолютний ряд збіжний, тому робимо висновок, що знакозмінний ряд абсолютно збіжний.

Домашнє завдання:

Написати конспект

Зворотній зв'язок

E-mail vitasergiiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.