25.04.2022
Група 33
Математика (алгебра)
Урок 56-57
Тема: Повторення. Похідна, дослідження функції.

Матеріали до уроку:

Розв'язування прикладів на похідні не обходиться без таблиці похідних.

1. $(c)' = 0;$
2. $(x)' = 1;$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v';$
4. $(cu)' = cu';$
5. $(uv)' = u'v + v'u;$
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
7. $\left(\frac{c}{x}\right)' = -\frac{c}{x^2}$
8. $(x^n)' = nx^{n-1}$
9. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(c^x)' = c^x \cdot \ln c; c > 0, c \neq 1$
11. $(e^x)' = e^x$
12. $(\log_c x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_c e = \frac{1}{x \ln c}$
13. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
14. $(\sin x)' = \cos x$
15. $(\cos x)' = -\sin x$
16. $(tg\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
17. $(ctg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
18. $(\sec x)' = \sec x \cdot tg\ x$
19. $(cosec\ x)' = -cosec\ x \cdot ctg\ x$
20. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
22. $(arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$
23. $(arcctg\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
24. $y=f(u(x)),\ y'=f'(u)\cdot u'_x$

Її завжди слід мати видрукованою під рукою і користуватися при обчисленнях як шпаргалкою. Голова не смітник, і всього що вчать не запам'ятати, а от вміти користуватися формулами та правильно знаходити похідні може навчитися кожен школяр і студент. Перші дві формули прості, перша говорить, що похідна від сталої рівна 0, друга - похідна "ікса" рівна одиниці. Далі йдуть формули похідних суми, добутку та частки, їх застосовують коли задану функцію можна подати у вигляді суми, добутку чи частки функцій.
Окремий урок ми приділимо похідній складеної функції (24), а поки що ознайомтеся з формулою як її знаходити

$$y = f(\varphi(x))$$
$$y' = f'_{\varphi} \cdot \varphi'_x$$

Далі на поширених з практичних прикладах навчимо Вас користуватися усіма приведеними тут формулами.

Похідна суми, добутку та частки функцій

Приклад 1 Знайдіть похідну
$y=x^5-4x^3+2x^2-7x.$
Розв'язування: Використовуємо 2 та 8 формули та правила 3,4

$$y' = (x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x)' =$$
$$= (x^5)' - (4x^3)' + (2x^2)' - (7x)' =$$
$$= (x^5)' - 4(x^3)' + 2(x^2)' - 7(x') =$$
$$= 5x^4 - 12x^2 + 4x - 7.$$

Отримали похідну
$y'=5x^4-12x^2+4x-7$.

Приклад 2 Обчисліть похідну
$y=\sqrt{(3x)}$.
Розв'язування: Тут напряму формулу (9) не використаємо. Але можемо звести під формулу складеної функції.
Якщо $y=f(u(x))$, то похідна рівна $y=f'_u*u'_x$.
Для кореневої функції $y=\sqrt{(3x)}$ виконаємо заміну:
$u=3x$, тоді $y=\sqrt{u}$.
Тоді за формулою (9) похідна рівна

$$y'=\left(\sqrt{3x}\right)'=(u=3x)=\left(\sqrt{u}\right)'=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'=\frac{1}{2\sqrt{3x}}(3x)'=\frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

Приклад 3 Обчисліть похідну
$y=5^{3x}+7^{2x}$.
Розв'язування: Застосуємо десяту формулу для обчислення похідної показникової функції, тільки пам'ятаємо, що в степені не 1-ці, тому додатково домножуємо на похідну степеня (3x)'=3, (2x)'=2.
$y'=(5^\wedge 3x+7^\wedge 2x)'= 5^{3x}\cdot ln5\cdot(3x)'+7^{2x}\cdot ln7\cdot(2x)'=$
$=3\cdot 5^{3x}\cdot ln5+2\cdot 7^{2x}\cdot ln7$.
Спершу важко читати та зрозуміти як знаходили похідну, але вивчивши формули та правила, все стає зрозумілим.

Приклад 4 Знайдіть похідну функції
$y=(x^2-2x+3)^5$.
Розв'язування: На практиці ніхто з Вас не буде піднімати квадратний тричлен x^2-2x+3 до 5 степеня, а тоді обчислювати похідну. За формулою складеної функції, перепозначимо:
$y=u^5$, $u=x^2-2x+3$.
Тоді похідна рівна

$$y'=(u^5)'_u(x^2-2x+3)'_x=5u^4(2x-1)=10(x-1)(x^2-2x+3)^4$$

Простіше вже бути не може.

Перейдемо до вивчення **правила похідної добутку функцій**
y'=(u·v)'=u'·v+u·v' (5)

Приклад 5 Знайти похідну за правилом добутку функцій
$y=(1-x^3)\cdot(x^4+4x)$.
Розв'язування: На початках для простоти обчислень, можете виконувати заміни:
u=$1-x^3$, v=x^4+4x, тоді y=u·v.
Далі за формулою похідної добутку функцій
$y'=(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$,
обчислити похідні та підставити в праву сторону.
Спробуйте виконати так для кількох добутків функцій і Ви навчитеся обходитися без покрокового обчислення. Тоді Ваша відповідь прийде до наступного вигляду

$$y'=\left[(1-x^3)(x^4+4x)\right]'=$$
$$=(1-x^3)'(x^4+4x)+(x^4+4x)'(1-x^3)=$$
$$=-3x^2(x^4+4x)+(4x^3+4)(1-x^3)=$$
$$=-7x^6-12x^3+4.$$

Спершу це важко зробити без помилок, але ми для того і вчимося, щоб вміти робити те, про що раніше не знали.

Приклад 6 Обчислити похідну функції
$y=x^2 \cdot ln(x+5)$.
Розв'язування: Застосуємо правило похідної добутку та формулу для логарифма (13). Перед переглядом відповіді можете самостійно знайти похідну, поклавши
$y=u \cdot v,\ u=x^2,\ v=ln(x+5)$ в формулу (5).
Звірте чи отримали ту ж відповідь.
$y'=(u \cdot v)'=u' \cdot v+u \cdot v'$
$y'=(x^2)' \cdot ln(x+5)+x^2 \cdot (ln(x+5))'=$
$=2x \cdot ln(x+5)+x^2 \cdot 1/(x+5) \cdot (x+5)'=$
$=2x \cdot ln(x+5)+x^2/(x+5)$.
З формули слідує, що якщо при аргументу *"x"* немає множника, а лише стала як доданок, то похідну можна не брати, тобто
$(x+5)'=1$,
а одиниця як множник "погоди" в похідну не вносить.

Познайомимося на кількох прикладах з формулою похідної частки функцій
$\mathbf{y'=(u/v)'=(u' \cdot v-u \cdot v')/v^2}$ (11)

Приклад 7 Обчислити похідну функції
$y=(1+x^2)/(1-x^2)$.
Розв'язування: За правилом похідної частки в чисельнику дістанемо
$(1+x^2)*(1-x^2)'+(1+x^2)'*(1-x^2)$,
в знаменнику похідної буде квадрат знаменника заданої функції.
Після розписання похідних та групування подібних доданків, остаточно отримаємо:

$$y' = \frac{(1-x^2)(1+x^2)'-(1+x^2)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} =$$
$$= \frac{(1-x^2)2x-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

І так для всіх часток функцій, що Вам зустрічаються.

Приклад 8 Обчислити похідну функції
$y=cos(x)/(x^2+2x+3)$.
Розв'язування: Правило похідної частки дає наступний алгоритм обчислень.
В чисельнику похідної отримаємо
$cos(x)*(x^2+2x+3)'+(cos(x))'*(x^2+2x+3)$,
в знаменнику квадрат знаменника, що заданий.
Знаходимо похідні та розписуємо

$$y' = \frac{(\cos(x))' \cdot (x^2+2x+3)+\cos(x) \cdot (x^2+2x+3)'}{\left(x^2+2x+3\right)^2} =$$
$$= \frac{-\sin(x) \cdot (x^2+2x+3)+\cos(x) \cdot (2x^2+2x)}{\left(x^2+2x+3\right)^2} =$$
$$= \frac{2x\cos(x) \cdot (x+1)-\sin(x) \cdot (x^2+2x+3)}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$$

Додатково опрацювати:

https://yukhym.com/uk/doslidzhennya-funktsiji/doslidzhennya-funktsiji-pobudova-grafika.html