

25.04.2022

Група 33

Математика (геометрія)

Урок 57-59

Тема: Повторення. Площі бічної та повної поверхонь многогранників.

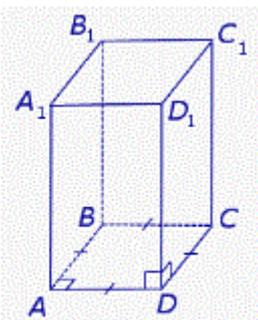
Матеріали до уроку:

Формули площі поверхні правильної чотирикутної призми

$$S_{\text{призми}} = 2 \cdot S_{\text{осн}} + 4 \cdot S_{\text{б.г.}} \quad \boxed{1}$$

$$S_{\text{призми}} = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot h \quad \boxed{2}$$

$$S_{\text{призми}} = 2a(a + 2h) \quad \boxed{3}$$



Якщо врахувати, що в основі правильної чотирикутної призми маємо квадрат, то площа основи рівна

$$S_{\text{осн}} = a \cdot a = a^2.$$

Якщо висота призми рівна h , то площа однієї бічної грані рівна:

$$S_{\text{б.г.}} = a \cdot h.$$

При підставленні у формулу (1) повної площі призми дістанемо (2, 3) формулу:

$$S_{\text{призми}} = 2a^2 + 4a \cdot h.$$

Оскільки в перерізах маємо або квадрат або прямокутники, то прямих задач на повну поверхню призми не так і багато, та й хід їх обчислень простий. Більший інтерес представляє на практиці обчислення площі поверхні правильної чотирикутної призми вписаної в кулю чи циліндр, такі завдання дал розберемо.

Приклад 1. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 3 см, а її висота - 7 см.

Знайдіть площу бічної поверхні призми та її об'єм.

Розв'язування: За формулою (2) обчислюємо площу бічної поверхні:

$$S_{\text{б.п.}} = 2a^2 + 4a \cdot h = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 7 = 102 \text{ см}^2.$$

Об'єм призми рівний добутку площі основи на висоту призми:

$$V = a^2 \cdot h = 3^2 \cdot 7 = 9 \cdot 7 = 63 \text{ см}^3.$$

Відповідь: $S_{\text{б.п.}} = 102 \text{ см}^2$, об'єм призми 63 см^3 .

Приклад 2. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 4 см, а її висота - 8 см.

Знайдіть площу перерізу призми, який проходить через діагональ основи паралельно діагоналі призми.

Розв'язування: Можлив два варіанти, розглянемо обидва (див.

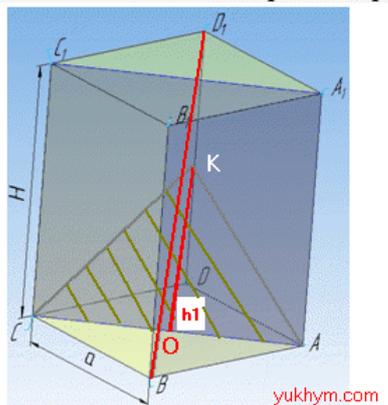


рисунок).

Перший - простий випадок, коли діагональ основи та діагональ призми виходять з однієї з її вершин (C). Тоді перерізом призми буде прямокутник, що проходить через діагональ основи та два ребра призми.

Довжина діагоналі основи рівна

$$CA = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ см.}$$

Площа перерізу призми рівна добутку діагоналі основи на висоту:

$$S = CA * H = 4\sqrt{2} * 8 = 32\sqrt{2} \text{ см}^2.$$

II випадок.

Площина паралельна діагоналі призми $B D I$, але виходить з діагоналі основи CA .

Тоді перерізом буде рівнобедрений трикутник $\Delta C K A$, основа якого вже знайдена:

$$CA = 4\sqrt{2} \text{ см.}$$

Оскільки площина паралельна діагоналі призми, то

$$DK = DD I / 2 = 8 / 2 = 4 \text{ см.}$$

Тоді сторону трикутника KA знайдемо з ΔADK в якого $KD = AD = 4$ см:

$$KA = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ см.}$$

Обчислимо висоту $h I$ трикутника $\Delta C K A$ за теоремою Піфагора:

$$h I = \sqrt{KA^2 - OA^2}$$

$$OA = CA / 2 = 2\sqrt{2} \text{ см;}$$

$$h I = \sqrt{16 - 8} = 2\sqrt{2} \text{ см.}$$

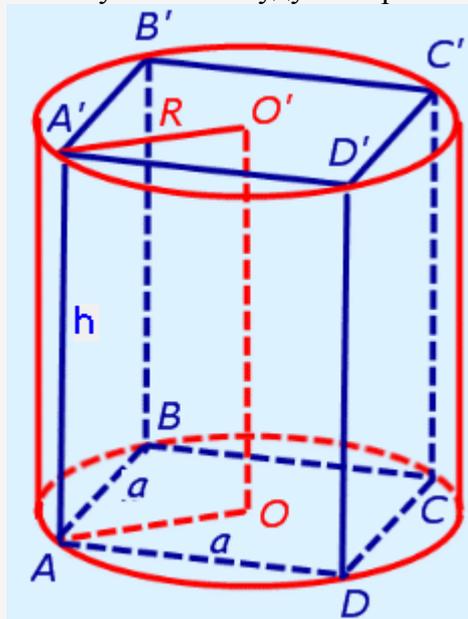
Знаходимо площу шуканого перерізу через півдобуток основи трикутника (діагоналі основи призми) на висоту трикутника

$$S = CA * h I = 4\sqrt{2} * 2\sqrt{2} = 16 \text{ см}^2.$$

Обидві відповіді правильні.

Приклад 3. В циліндр, радіус основи якого дорівнює $2\sqrt{2}$ см, а висота 5 см, вписано правильну чотирикутну призму. Знайти площу повної поверхні цієї призми.

Розв'язування: Побудуємо правильну призму вписану в циліндр.



За умовою $AO = 2\sqrt{2}$ см, $h = 5$ см.

Діагональ квадрата в основі

$$d = 2 * AO = 4\sqrt{2} \text{ см.}$$

Довжина діагоналі через сторону квадрата

$$d = a\sqrt{2}, \text{ прирівняємо з попереднім записом}$$

$$a\sqrt{2} = 4\sqrt{2},$$

$$a = 4 \text{ см.}$$

Площа повної поверхні призми рівна сумі площ 2 основ (квадратів) + 4 поверхні ребер (прямокутників).

$$S_{осн} = a^2 = 4^2 = 16;$$

$$P = 4a = 4 * 4 = 16;$$

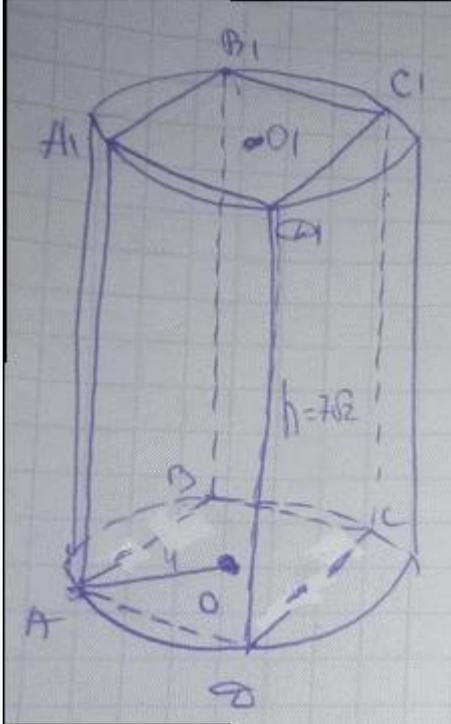
$$S_{біч.п.} = P * h = 16 * 5 = 80;$$

$$S_{п.п.} = 2S_{осн} + S_{бч.п.} = 2 \cdot 16 + 80 = 112 \text{ см}^2.$$

Відповідь: площа повної поверхні призми = 112 см^2 .

Приклад 4. Правильну чотирикутну призму вписали у циліндр із радіусом основи 4 см і висотою $7\sqrt{2} \text{ см}$. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

Розв'язування: Побудуємо допоміжний рисунок до задачі.



Оскільки призма правильна, то радіус циліндра рівний половині діагоналі квадрата в основі призми

$$R = AO = AC/2.$$

Сторона квадрата (за теоремою Піфагора):

$$AB = AD = 4\sqrt{2} \text{ см.}$$

Площа бічної поверхні призми рівна добутку периметру квадрата на висоту:

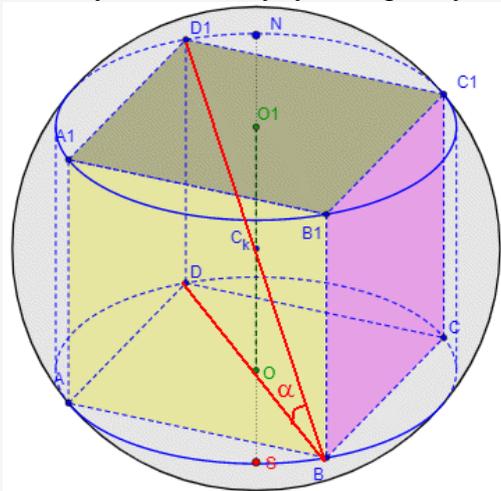
$$P = 4 \cdot AB = 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \text{ см.}$$

$$S = P \cdot h = 16\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 224 \text{ см}^2.$$

Відповідь: 224 см^2 .

Приклад 5. У кулю радіуса R вписано правильну чотирикутну призму, Діагональ якої нахилена до площини основи під кутом альфа. Знайдіть сторону основи призми.

Розв'язування: Побудуємо призму вписану в кулю до задачі:



В основі – квадрат зі стороною a .

Діагональ призми $D1B = 2R$, квадрату – $DB = d$,

α - кут між діагоналлю призми та діагоналлю основи (квадрата).

Виразимо діагональ квадрату через діагональ призми:

$$d=2R*\cos\alpha;$$

та через сторону квадрата

$$d=a\sqrt{2}.$$

Прирівняємо та знайдемо сторону основи

$$a\sqrt{2}=2R*\cos\alpha;$$

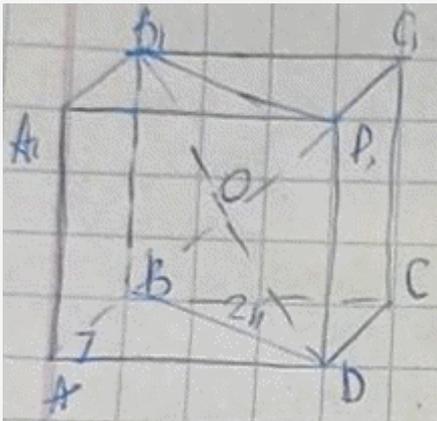
$$a=d/\sqrt{2}=2R\cos\alpha/\sqrt{2}=\sqrt{2}*R*\cos\alpha.$$

Відповідь: $a=\sqrt{2}*R*\cos\alpha$.

Приклад 6. Діагональний переріз правильної чотирикутної призми є квадратом з площею $4n^2$ см². Знайдіть сторону основи.

Розв'язування: Підказкою до задачі є умова, що переріз BB_1D_1D є квадратом, тому висота призми рівна діагоналі основи BD :

$$H=BB_1=BD.$$



Впишемо формулу площі перерізу та обчислимо BD :

$$S=BB_1*BD=4n^2 \text{ см}^2;$$

$$S=BD^2=4n^2=(2n)^2;$$

$$BD=2n \text{ см.}$$

За теоремою Піфагора діагональ основи (квадрата) рівна:

$$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=AD\sqrt{2}.$$

Прирівнюємо до попередньо виведеного значення:

$$AD\sqrt{2}=2n \text{ см.};$$

$$AD=2n/\sqrt{2}=\sqrt{2}n \text{ см.}$$

От і всі розрахунки до задачі.

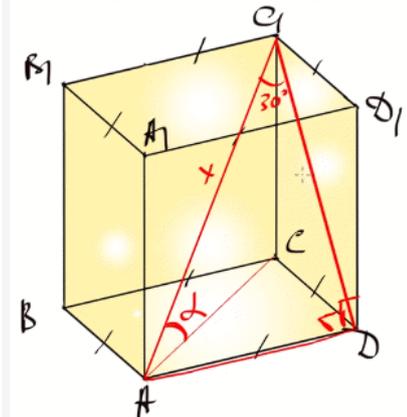
Відповідь: сторона основи = $\sqrt{2}n$ см.

Приклад 7. Діагональ правильної чотирикутної призми утворює з площиною бічної грані кут 30° градусів. Знайдіть:

1) кут між діагоналлю призми та площиною основи;

2) площу бічної поверхні призми, якщо довжина сторони основи рівна 6 см.

Розв'язування: Кут між прямою та площиною – це кут між прямою і проекцією прямої на площину. Побудуємо рисунок призми:



Оскільки проекцією діагоналі AC_1 на бічну поверхню CDD_1C_1 є діагональ бічної грані C_1D , то вказаний в умові кут це $\angle AC_1D=30^\circ$.

$\angle ADC_1=90^\circ$, оскільки основа і бічні грані попарно перпендикулярні.

Кут між діагоналлю та основою – це кут $\angle CAC_1$. Його потрібно знайти

Позначимо через x – діагональ призми.

Тоді катет AD навпроти кута 30° рівний половині гіпотенузи $AC_1=x$,

$$AD=x/2.$$

$CD=AD=x/2$ - сторона квадрата основи.

За теоремою Піфагора обчислимо діагональ квадрата:

$$AC=x/2\sqrt{(1+1)}=x\sqrt{2}/2.$$

В прямокутному трикутнику $\triangle ACC_1$ катет і гіпотенуза пов'язані косинусом:

$$\cos\alpha=AC/AC_1=x\sqrt{2}/2:x=\sqrt{2}/2,$$

звідси $\alpha=45^\circ$.

Потрібний кут ми знайшли.

Обчислимо площу бічної поверхні призми, знаючи кут $\alpha=45^\circ$.

Тоді висота призми рівна діагоналі основи (як сторони рівнобедреного трикутника):

$$h=AC=6\sqrt{2}\text{ см.}$$

Периметр основи рівний

$$P=4a=4*6=24\text{ см.}$$

Площа бічної поверхні призми:

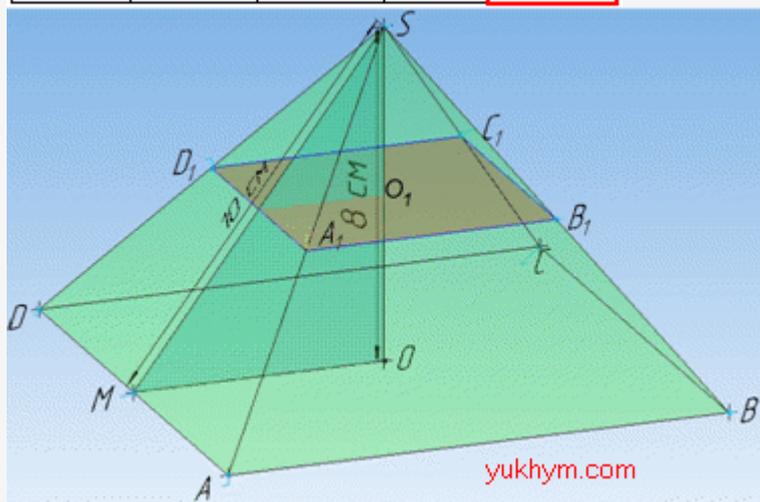
$$S_{б.п.}=P*h=24*6\sqrt{2}=144\sqrt{2}\text{ см}^2$$

Відповідь: $144\sqrt{2}\text{ см}^2$.

Правильна чотирикутна піраміда. Площа та об'єм піраміди

Задача 37.5 Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, апофема піраміди – 10 см. Знайти у квадратних сантиметрах площу перерізу піраміди, проведеного через середину висоти паралельно до площини основи.

А	Б	В	Г	Д
24 см ²	72 см ²	48 см ²	9 см ²	36 см ²



Розв'язання: В основі правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ маємо квадрат $ABCD$.

Проекція вершини правильної піраміди співпадає з центром основи піраміди (в точку перетину діагоналей квадрата), звідси $SO=8$ см – висота піраміди.

Проведемо відрізок $MO \perp AD$. Оскільки висота SO піраміди перпендикулярна до площини основи (квадрата $ABCD$), то вона перпендикулярна до кожної прямої, що належить площині основи, тому $SO \perp MO$. Проведемо відрізок (похилу) SM . Оскільки $MO \perp AD$, то за теоремою «про три перпендикуляри» $SM \perp AD$, звідси $SM=10$ см – висота бічної грані правильної чотирикутної піраміди – апофема піраміди.

У прямокутному трикутнику SOM ($\angle SOM=90^\circ$), у якого $SO=8$ см – катет, $SM=10$ см – гіпотенуза знайдемо інший катет MO :

$$MO^2 = SM^2 - SO^2 \rightarrow$$

$$MO = \sqrt{SM^2 - SO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6 \text{ см}$$

У квадраті $MO \perp AD$, де точка O – центр квадрата (точка перетину діагоналей), тому (за властивістю квадрата) $MO \parallel AB$ і $AB = 2MO = 12$ см (це доводиться на основі того, що MO – середня лінія трикутника ACD).

Площа основи (квадрата $ABCD$) піраміди:

$S_{ABCD} = AB^2 = 12^2 = 144$ см². За властивістю: площина яка проходить паралельно основі піраміди відтинає подібну піраміду. Маємо правильну чотирикутну піраміду $SA_1B_1C_1D_1$ з висотою $SO_1 = SO/2 = 8/2 = 4$ см (за умовою задачі) і основою – квадрат $A_1B_1C_1D_1$.

У подібних фігур площі пропорційні до квадратів їх лінійних розмірів, тому

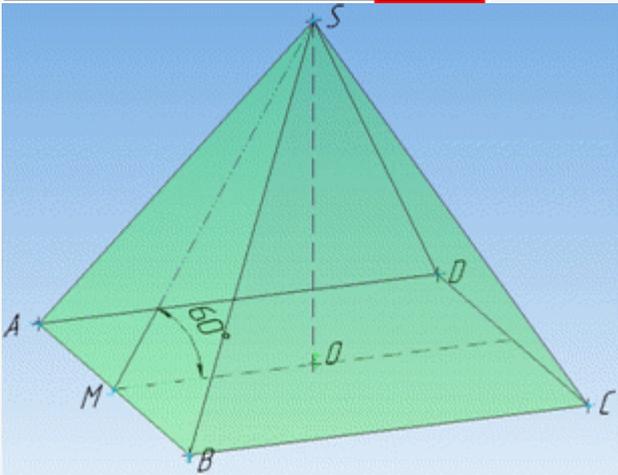
$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = \frac{SO_1^2}{SO^2} \rightarrow$$

$$S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot \frac{SO_1^2}{SO^2} = 144 \cdot \frac{4^2}{8^2} = 144 \cdot \frac{16}{64} = \frac{144}{4} = 36 \text{ см}^2$$

Відповідь: 36 см² – Д.

Задача 37.17 Повна поверхня правильної чотирикутної піраміди дорівнює S . Двогранний кут при ребрі основи – 60° . Визначити бічну поверхню піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{9}S$	$\frac{1}{2}S$	$\frac{5}{6}S$	$\frac{3}{4}S$	$\frac{2}{3}S$



Розв'язання: Маємо правильну чотирикутну піраміду $SABCD$, в основі якої лежить правильний чотирикутник (квадрат) $ABCD$.

Нехай довжина сторони квадрата дорівнює a .

Тоді площа основи піраміди (квадрата):

$$S_{ос} = S_{ABCD} = a^2.$$

Висота SO правильної чотирикутної піраміди проектується у центр квадрата $ABCD$, тобто в точку O перетину діагоналей AC і BD .

З точки O проведемо відрізок MO перпендикулярно до сторони AB , тобто $MO \perp AB$. За властивістю квадрата:

$$MO \parallel BC \text{ і } MO = BC/2 = a/2.$$

Оскільки висота SO перпендикулярна до площини основи (квадрата $ABCD$), то вона перпендикулярна до кожної прямої, що лежить в цій площині, тому $SO \perp MO$.

Проведемо відрізок SM . Оскільки $MO \perp AB$, то за теоремою «про три перпендикуляри» $SM \perp AB$.

Звідси слідує, що $\angle SMO = 60^\circ$ – лінійний кут двогранного кута (двогранний кут) при ребрі основи – кут нахилу бічної грані до площини основи.

Розглянемо прямокутний трикутник SOM ($\angle SOM = 90^\circ$), у якого $MO = a/2$ – прилеглий катет

до $\angle SMO = 60^\circ$.

За означенням косинуса гострого кута прямокутного трикутника знайдемо гіпотенузу SM – апофему піраміди:

$$\cos \angle SMO = \frac{MO}{SM} \rightarrow$$

$$SM = \frac{MO}{\cos \angle SMO} = \frac{a}{2 \cos 60^\circ} = \frac{a}{2 \cdot 0,5} = a$$

Площа бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди:

$$S_{\text{б}} = \frac{1}{2} P_{\text{ос}} \cdot l = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} \cdot SM = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot a = 2a^2$$

Площа повної поверхні піраміди:

$$S_{\text{п.п}} = S_{\text{ос}} + S_{\text{б}} = a^2 + 2a^2 = 3a^2$$

Але за умовою задачі $S_{\text{п.п}} = S$, тому $3a^2 = S$, звідси $a^2 = S/3$.

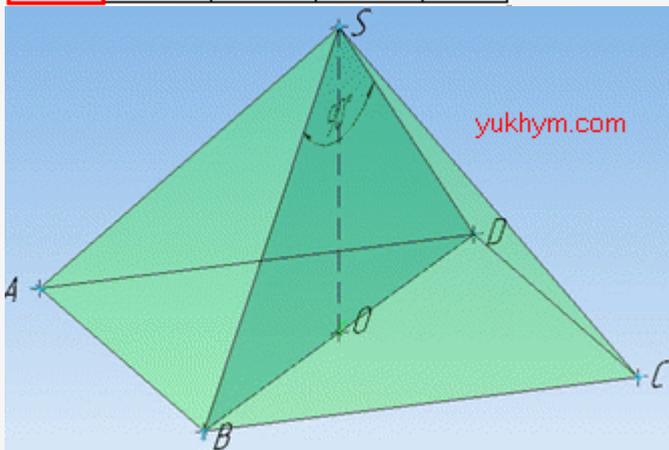
Площа бічної поверхні піраміди:

$$S_{\text{б}} = 2a^2 = 2 \cdot \frac{S}{3} = \frac{2}{3} S$$

Відповідь: $2S/3$ – Д.

Задача 37.18 Діагональним перерізом правильної чотирикутної піраміди є прямокутний трикутник, площа якого дорівнює Q . Знайти площу основи піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$2Q$	$4Q$	Q	$\frac{Q}{2}$	$\frac{Q}{4}$



Розв'язання: Маємо правильну чотирикутну піраміду $SABCD$, в основі якої лежить правильний чотирикутник (квадрат) $ABCD$.

Нехай довжина сторони квадрата $ABCD$ дорівнює a .

Тоді площа основи піраміди (квадрата):

$$S_{\text{ос}} = SABCD = a^2.$$

Висота SO правильної чотирикутної піраміди проектується у центр квадрата $ABCD$, тобто в точку O перетину діагоналей AC і BD . Діагоналі квадрата рівні:

$$AC = BD = a\sqrt{2} \text{ (за теоремою Піфагора із прямокутного } \triangle BCD \text{)}.$$

Діагональним перерізом піраміди є прямокутний трикутник BSD ($\angle BSD = 90^\circ$) за умовою задачі.

Висота SO є одночасно висотою піраміди $SABCD$ і висотою $\triangle BSD$, опущеної з вершини прямого кута.

Оскільки в правильній піраміді всі бічні ребра рівні, то $SB = SD$, тому $\triangle BSD$ – рівнобедрений з основою BD і бічними сторонами $SB = SD$.

За властивістю кутів рівнобедреного трикутника:

$$\angle SBD = \angle SDB = 45^\circ, \text{ тому } \angle SDO = \angle SDB = 45^\circ.$$

Розглянемо прямокутний $\triangle SOD$ ($\angle SOD = 90^\circ$).

Запишемо довжину

$$DO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{– прилеглого катета до кута } \angle SDO=45^\circ.$$

Із означення тангенса гострого кута прямокутного трикутника знайдемо SO – висоту піраміди і $\triangle BSD$:

$$\operatorname{tg} \angle SDO = \frac{SO}{DO} \rightarrow$$

$$SO = DO \cdot \operatorname{tg} \angle SDO = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Звідси маємо $SO = a/\sqrt{2}$.

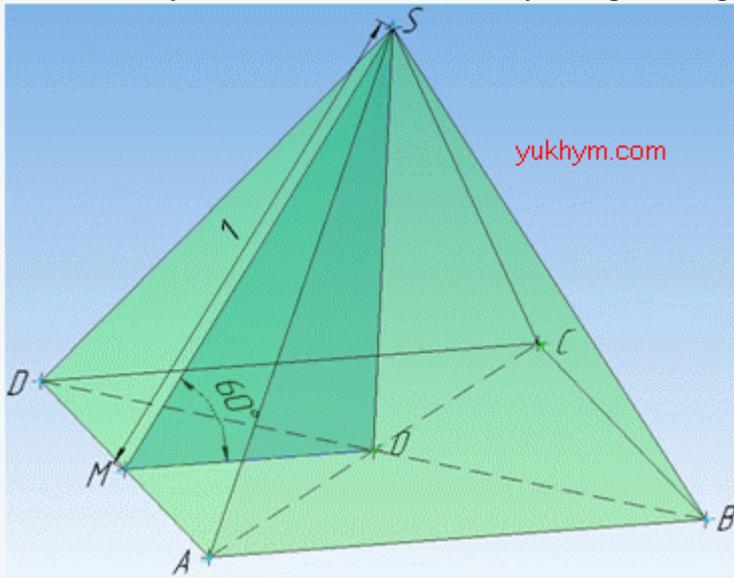
Далі знаходимо площу трикутника $\triangle BSD$:

$$S_{BSD} = \frac{1}{2} SO \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2}{2}$$

Але за умовою задачі $S_{BSD} = Q$, тоді $a^2/2 = Q$, звідси виражаємо $a^2 = 2Q$ – площа основи.

Відповідь: $2Q - A$.

Задача 37.32 Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 1 і нахилена до площини основи під кутом 60° . Визначити повну поверхню піраміди.



Розв'язання: Площа повної поверхні правильної піраміди:

$$S_{n.n} = S_{oc} + S_{б} = a^2 + \frac{1}{2} P_{oc} l = a^2 + \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 1 = a^2 + 2a$$

$S_{oc} = a^2$ – площа основи (квадрата $ABCD$) правильної чотирикутної піраміди;

$$S_{б} = \frac{1}{2} P_{oc} l \quad \text{– площа бічної поверхні;}$$

P_{oc} – периметр основи;

$l = SM = 1$ – апофема.

Висота SO правильної чотирикутної піраміди проектується у центр квадрата $ABCD$ (зі стороною a), тобто в точку O перетину діагоналей AC і BD .

З точки O проведемо відрізок MO перпендикулярно до сторони AD , тобто $MO \perp AD$.

За властивістю квадрата:

$MO \parallel AB$ і $MO = AB/2 = a/2$.

Оскільки висота SO перпендикулярна до площини основи (квадрата $ABCD$), то вона перпендикулярна до кожної прямої, що лежить в цій площині, тому $SO \perp MO$. Проведемо відрізок SM .

Оскільки $MO \perp AD$, то за теоремою «про три перпендикуляри» $SM \perp AD$.

Звідси слідує, що $\angle SMO=60$ – лінійний кут двогранного кута (двогранний кут) при ребрі основи – кут нахилу бічної грані (апофеми) до площини основи.

Розглянемо прямокутний трикутник SOM ($\angle SOM=90$), у якого $SM=1$ – гіпотенуза $\angle SMO=60$.

За означенням косинуса гострого кута прямокутного трикутника знайдемо прилеглий катет $MO=a/2$ – половину сторони основи:

$$\cos \angle SMO = \frac{MO}{SM} \rightarrow$$

$$MO = SM \cdot \cos \angle SMO = 1 \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Обчислимо довжину сторони основи (квадрата $ABCD$):

$MO=a/2=1/2$, звідси $a=1$.

Площа повної поверхні правильної піраміди:

$$S_{n.n} = S_{oc} + S_{\sigma} = a^2 + 2a = 1^2 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$$

Відповідь: 3.

Домашнє завдання:

Зробити конспект

Зворотній зв'язок

E-mail [vitasergiivna1992@gmail.com](mailto: vitasergiivna1992@gmail.com)

!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.