УРОКИ 10-11 ОПІР МАТЕРІАЛІВ
ТЕМА : ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1
РІВНОВАГА ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ ЗБІЖНИХ СИЛ

Теоретичні відомості

Системою збіжних сил називають сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

Систему збіжних сил, лінії дії яких розміщені в одній площині, називають ***плоскою***. Всі сили такої системи можна перенести вздовж ліній їх дій у спільну точку перетину цих ліній. Від цього дія цієї системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, що випливає з другої аксіоми статики. Отже, будь-яка система збіжних сил може бути замінена еквівалентною системою сил, прикладених в одній точці.

Якщо на тіло діють дві сили $\overline{F}_1$ та $\overline{F}_2$, прикладені в одній точці *O*, то рівнодійна $\overline{R}$ цих сил дорівнює їх геометричній сумі (рис. 1*а*):

$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$.

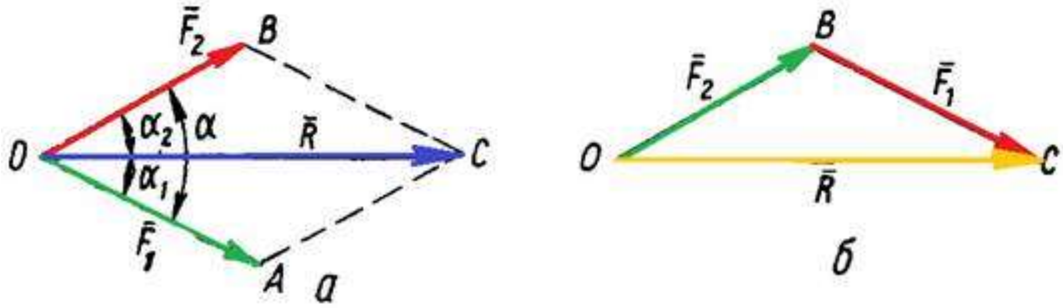


Рис. 1

Для знаходження рівнодійної двох сил $\overline{F}_1$ та $\overline{F}_2$, прикладених в одній точці *O,* не треба будувати весь паралелограм *OACB* (рис. 1*а),* а досить побудувати один з трикутників *OAC* чи *OBC* (рис. 1*б*).

Трикутник *OBC* (або *OAC*) називають ***силовим трикутником***, а такий спосіб додавання двох сил – ***правилом трикутника***.

Якщо є кілька збіжних сил, то, застосовуючи послідовно правило додавання двох сил, роблять висновок, що *рівнодійна кількох збіжних сил також дорівнює їх геометричній сумі* (рис.2):

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$$

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_i$$

тобто, щоб спростити запис, границі зміни індекс $\sum$ іноді опускають.

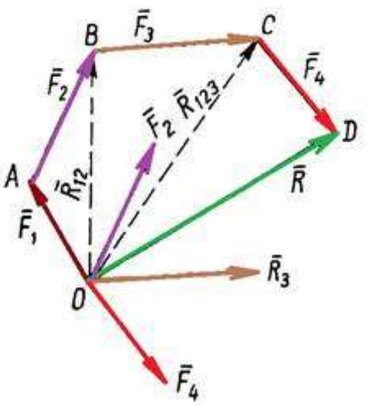


Рис. 2

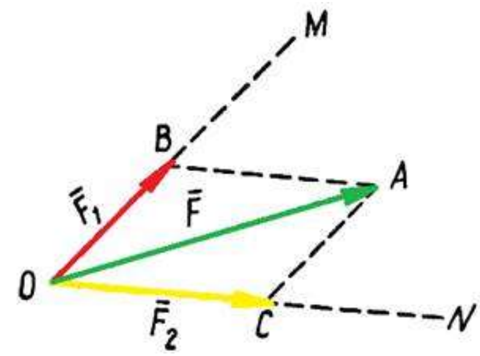


Рис. 3

Багатокутник *OABCD* (рис.2), сторони якого у вибраному масштабі дорівнюють певним силам і однаково з ними спрямовані, називається силовим багатокутником. У силовому багатокутнику стрілки завжди спрямовані одна за одною. Замикаюча сторона *OD* силового багатокутника спрямована завжди від початку першої сили до кінця останньої і за модулем та за напрямком у вибраному масштабі вона зображає рівнодійну певної системи збіжних сил. Правило додавання збіжних сил за способом багатокутника є загальним для складання будь-яких векторів і називається *геометричним додаванням*.

Розкладання сили на складники є оберненою дією додавання сил. Особливо часто доводиться розкладати задану силу $\overline{F}$ на два складники за двома заданими напрямками *OM* та *ON* (рис. 3). Для цього з кінця *A* вектора сили $\overline{F}$ проводимо прямі *AB* і *AC,* які відповідно паралельні прямим *ON* і *OM,* і отримаємо паралелограм *OBAC.* Сила $\overline{F}$, очевидно, буде діагоналлю цього паралелограма. Вектори $\overline{F}_1 = \overline{OB}$ і $\overline{F}_2 = \overline{OC}$ є шуканими складовими силами.

Проекцією сили $\overline{F}$ на вісь x називається відрізок між основами A_1 і B_1 перпендикулярів, опущених на цю вісь з початку і кінця сили (рис. 4*а*). Точка A_1 буде початком, а B_1 – кінцем проекції. Проекція буде додатною, якщо її напрямок збігається з додатним напрямком осі, якщо ж ні – то від'ємна.

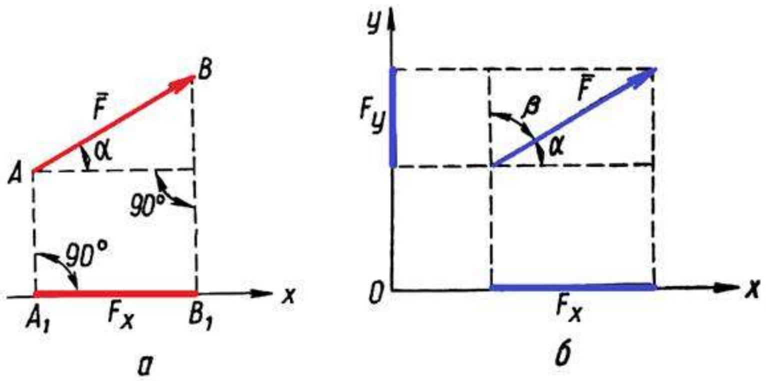


Рис. 4

Із рис.4*б* бачимо, що залежність між проекцією і величиною проектованої сили визначається рівністю:

$F_x = F\cos\alpha,$

де α – кут між силою і додатним напрямком осі.

Очевидно, якщо $\alpha < 90°$ і $\alpha > 270°$ проекція сили на вісь буде додатною, а якщо $90° < \alpha < 270°$ – від'ємною. Якщо $\alpha = 90°$ або $\alpha = 270°$, то проекція сили на вісь дорівнює нулю, оскільки сила $\overline{F}$ перпендикулярна до осі. Величину сили $\overline{F}$ можна знайти за її проекцією на дві взаємно перпендикулярні осі (x та y), користуючись теоремою Піфагора (рис.1.12*б*):

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

Лінію дії і напрямок сили визначають за допомогою косинусів кутів між силою і додатними напрямками осей проекцій:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}; \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{F}.$$

Теорема: *Проекція рівнодійної на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на цю саму вісь.*

Доведемо цю теорему. Для цього з сил побудуємо силовий багатокутник *ABCDE* (рис.5), в якому рівнодійну зображують вектором $\overline{R} = \overline{AE}$.

Опустимо перпендикуляри на вісь x із усіх вершин цього багатокутника. Тоді, позначивши проекції сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ на вісь x відповідно через $F_{1x}, F_{2x}, F_{3x}, F_{4x}$, матимемо:

$$\overline{F}_{1x} = ab,\ F_{2x} = -bc,\ \overline{F}_{3x} = cd,\ F_{4x} = -de.$$

Відрізки *bc* і *de* від'ємні, оскільки вони спрямовані у бік, протилежний напрямку осі проекцій. Очевидно, що $F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = ab - bc + cd - de.$

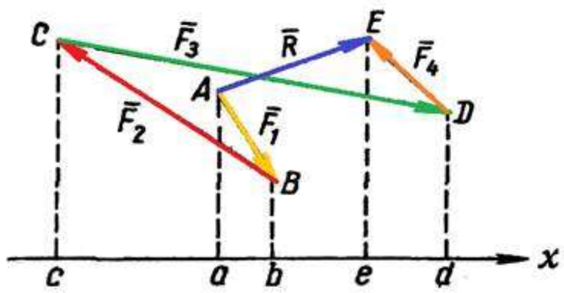


Рис. 5

З рис.5 бачимо, що *ab – bc = – ac; – ac + cd = ad; ad – de = ae.* Але *ae* є проекцією рівнодійної $\overline{R} = \overline{AE}$ на вісь *x*. Позначивши проекцію рівнодійної $\overline{R}$ на вісь *x* через R_x, матимемо:

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = R_x.$$

Отже, теорему доведено. Проекція рівнодійної на вісь *x* дорівнюватиме:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}.$$

Спроектувавши цю саму систему сил на вісь *y,* перпендикулярну осі *x,* і застосувавши відповідні позначення, дістанемо:

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}.$$

Величину рівнодійної $\overline{R}$ знаходимо за формулою:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2}.$$

Лінію дії і напрям рівнодійної знаходимо за допомогою косинусів кутів між рівнодійною і додатними напрямками осей:

$$\cos(\hat{R, x}) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\hat{R, y}) = \frac{R_y}{R}.$$

ГЕОМЕТРИЧНА ТА АНАЛІТИЧНІ УМОВИ РІВНОВАГИ ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ ЗБІЖНИХ СИЛ. РАЦІОНАЛЬНИЙ ВИБІР КООРДИНАТНИХ ОСЕЙ

Для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна сил дорівнювала нулю.

Згідно з двома способами визначення рівнодійної умова рівноваги плоскої системи збіжних сил може бути виражена у двох формах.

1. Умова рівноваги у геометричній формі

Сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці (рис.6*а*), будуть зрівноважені, очевидно, тоді, коли їх рівнодійна дорівнюватиме нулю. У такому випадку довжина замикаючої сторони силового багатокутника має дорівнювати нулю, тобто силовий багатокутник буде замкнутим (рис.6*б*).

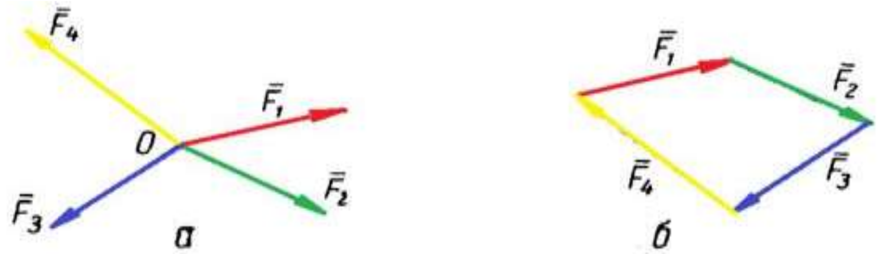


Рис. 6

Отже, геометрична умова рівноваги збіжних сил, що лежать в одній площині, полягає в тому, щоб багатокутник сил був замкнутим або інакше: *збіжні сили, розміщені в одній площині, перебувають у рівновазі, коли їх геометрична (векторна) сума дорівнює нулю*:

$$\overline{R} = \sum \overline{F_i} = 0.$$

2. Умова рівноваги в аналітичній формі

Аналітично величину рівнодійної визначають за формулою:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2} = 0.$$

Але коли $R = 0$, то нулю дорівнює і вираз під коренем, а це можливо тоді, коли кожна складова під коренем дорівнює нулю, тобто:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0.$$

Ці рівняння називають рівняннями рівноваги плоскої системи збіжних сил.

Отже, *для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на кожну з двох координатних осей, що лежать у площині дії сил, дорівнювали нулю*.

Теорема: *Якщо три непаралельні сили, розміщені в одній площині, взаємно зрівноважуються, то лінії дії їх перетинаються в одній точці*.

Нехай на тіло в точках A_1, A_2 та A_3 діють три непаралельні сили $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ і $\overline{F}_3$, що взаємно зрівноважуються і розміщені в одній площині (рис.7). Лінії дії двох сил, наприклад $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$, очевидно, перетинаються в одній точці *A*. Переносимо ці сили вздовж їх ліній дії в точку *A* та додаємо їх за правилом паралелограма. Тоді сила $\overline{R}$ буде їх рівнодійною. Отже, на тіло тепер діятимуть тільки дві сили: $\overline{R}$ та $\overline{F}_3$. Оскільки за умовою ці сили зрівноважуються, то вони мають бути рівними за модулем і спрямовані за однією прямою у протилежні боки. Таким чином, лінія дії сили $\overline{F}_3$ збігатиметься з лінією дії сили $\overline{R}$, а отже, проходитиме через точку *A,* в якій перетинаються лінії дії сил $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$. Це й треба було довести.

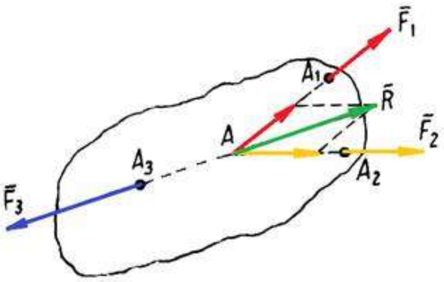


Рис. 7

Ця теорема має велике методичне значення під час розв'язування задач статики. При цьому доцільно додержуватися такої методики.

1. З'ясовуємо рівновагу якого тіла треба розглянути, щоб розв'язати задачу, тобто знайти шукані величини. Зазвичай розглядають рівновагу того тіла, до якого прикладені задані і шукані сили або сили, що дорівнюють шуканим (тобто, якщо треба знайти тиск на опору, то можна розглянути рівновагу тіла, до якого прикладена рівна цій силі реакція опори тощо).

2.Звільняємо тіло від в'язей і зображаємо на рисунку сили, що діють на тіло, і реакції відкинутих в'язей, зображуємо систему координат таким чином, щоб одна із невідомих реакцій була паралельна до однієї із осі (це спростить розв’язування рівнянь рівноваги).

3.До знайденої системи сил застосовуємо умови рівноваги, які відповідають цій системі.

4. Визначаємо шукані величини і досліджуємо результати.

Під час розв'язування задач на рівновагу плоскої системи збіжних сил потрібно раціонально розміщувати осі координат. Якщо одну із координатних осей розмістити вздовж лінії дії однієї із невідомих реакцій, то рівняння рівноваги можна буде розв'язати набагато простіше.

Приклад виконання завдання

До точки прикладені O сили: $F_1 = 9кН$, $F_2 = 12кН$, $F_3 = 15кН$, які лежать в одній площині і утворюють з віссю x кути: $\alpha_1 = 30^0$, $\alpha_2 = 135^0$, $\alpha_3 = 270^0$. Визначити величину і напрям рівнодіючої даної системи сил.

Вказівки до розв'язку. Напрям рівнодіючої можна визначити одним кутом; який відлічують від позитивного напряму осі х проти годинникової стрілки до напряму рівнодіючої. Кут α знаходиться в межах від 0^0 до 360^0 і визначається як кут між віссю x і рівнодіючою.

Розв'язок

1. Аналітичний спосіб.

1.1. Проводимо координатні осі та відкладаємо в даній системі координат сили під заданими кутами (рис. 1).

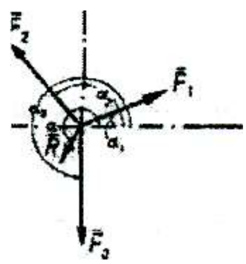


Рис. 1

1.2. Визначаємо проекції рівнодіючої на координатні осі як суму проекцій заданих сил на ці осі:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 + F_2 \cdot \cos\alpha_2 + F_3 \cdot \cos\alpha_3 =$$

$$9 \cdot \cos 30^0 + 12 \cdot \cos 135^0 + 15 \cdot \cos 270^0 = -0,69кН.$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 + F_2 \cdot \sin\alpha_2 + F_3 \cdot \sin\alpha_3 = 9 \cdot \sin 30^0 + 12 \cdot \sin 135^0 + 15 \cdot \sin 270^0 =$$

$$= -2,01кН.$$

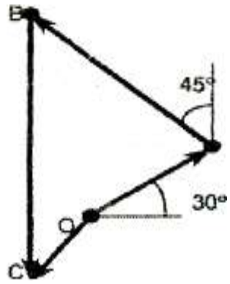
Визначаємо модуль рівнодіючої:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-0,69)^2 + (-2,01)^2} = 2,13кН.$$

1. 3. Визначаємо кут α між напрямом R і віссю x:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-0,69}{2,13} = -0,322; \qquad \sin\alpha = \frac{R_y}{R} = \frac{-2,01}{2,13} = -0,946.$$

Оскільки косинус і синус кута α від'ємні, то кут α повинен розміщуватись у третій чверті. Знаходимо кут $\alpha : \alpha = 251^0$. Відлічуємо цей кут від осі x проти руху годинникової стрілки і проводимо рівнодіючу R. **Графічний спосіб**



2.1. Вибираємо масштаб сил $\mu_F = 2 кН/см$. Визначаємо довжини сторін силового багатокутника, які відповідають в масштабі заданим силам:

$$OA = \frac{F_1}{\mu_F} = \frac{9}{2} = 4,5 см, \quad AB = \frac{F_2}{\mu_F} = \frac{12}{2} = 6 см, \quad BC = \frac{F_3}{\mu_F} = \frac{15}{2} = 7,5 см.$$

2.2. З довільної точки О проводимо відрізок OA, рівний вектору заданої сили $\vec{F}_1$ (рис. 2). З кінця *A* цього відрізка проводимо відрізок $AB = \vec{F}_2$. З кінця *B* цього відрізка проводимо відрізок $BC = \vec{F}_3$. Замикаюча сторона OC отриманого силового багатокутника відповідає рівнодіючій заданої системи сил у вибраному масштабі**:** $OC = 1,1 см$, отже, модуль рівнодіючої дорівнює: $F_{\sum} = OC \cdot \mu_F = 1,1 \cdot 2 = 2,2 кН$.

Вимірюємо кут між горизонталлю і замикаючою стороною $\alpha = 251^0$.

Приклад визначення реакцій стержня

Система двох стержнів навантажена силою $F = 170 кН$ (рис.3, а). Визначити реакції стержнів, Масою стержнів знехтувати.

1. Розглядаємо рівновагу шарніра *C*, на якій діє система збіжних сил: активна сила F та реакції зв'язків N_1 та N_2 (рис. 3, а).

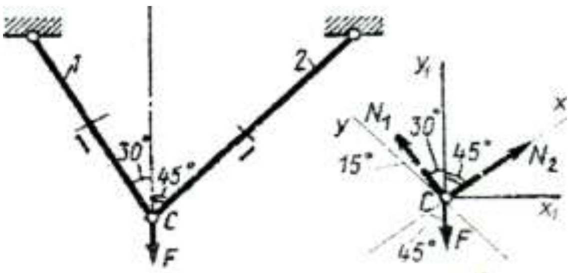


Рис.3

2. Вибираємо систему координат xCy**,** провівши вісь x через невідому реакцію N_2.

3. Складаємо рівняння (рис. 3, б):

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = N_2 + N_1 \cdot \cos 75^0 - F \cdot \cos 45^0 = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = N_1 \cdot \cos 15^0 - F \cdot \cos 45^0 = 0$$

4. Визначаємо зусилля в стержнях:

$$N_1 = \frac{F \cdot \cos 45^0}{\cos 15^0} = \frac{170 \cdot \cos 45^0}{\cos 15^0} = 124,45 кН,$$

$$N_2 = F \cdot \cos 45^0 - N_1 \cdot \cos 75^0 = 170 \cdot \cos 45^0 - 124,45 \cdot \cos 75^0 = 87,98 кН.$$

5. Виконуємо перевірку, вибравши нове розміщення координатних осей x_1Cy_1 (рис. 3,б)

$$\sum_{i=1}^{n} F_{yi} = N_1 \cdot \cos 30^0 - N_2 \cdot \cos 45^0 - F = 124,45 \cdot \cos 30^0 - 87,98 \cdot \cos 45^0 - 170 = 0,$$

отже, зусилля в стержнях визначено правильно.

Відповідь: $N_1 = 124,45 кН$, $N_2 = 87,98 кН$