

06.05.2022

Група 32

Математика (геометрія)

Урок 53-54

Тема: Повторення. Вектори у просторі

**Матеріали до уроку:**

**Колінеарні вектори. Перевірка умови колінеарності векторів**

Означення. Колінеарними називають вектори, які паралельні між собою або лежать на одній прямій.

Умова колінеарності:

- два вектори колінеарні якщо пропорційні їх координати  
 $a_x/b_x=a_y/b_y=a_z/b_z$ .
- вектори  $a(a_1; a_2; a_3)$  і  $b(b_1; b_2; b_3)$  колінеарні, якщо можна знайти таке число  $k$ , що виконується відношення  
 $b=k \cdot a: b_1=k \cdot a_1; b_2=k \cdot a_2; b_3=k \cdot a_3$ .

Основні властивості колінеарних (паралельних) векторів, які Ви повинні вивчити та знати, наведено на схемі



Приклад 42.7 Серед векторів  $a(4; 14; 2)$ ,  $b(2; 7; -1)$ ,  $c(0; 0; 3)$ ,  $d(-6; -21; 3)$  знайти колінеарні.

A	Б	В	Г	Д
$\vec{a} \parallel \vec{b}$	$\vec{a} \parallel \vec{c}$	$\vec{a} \parallel \vec{d}$	$\vec{b} \parallel \vec{c}$	$\vec{b} \parallel \vec{d}$

Розв'язування: Вектори колінеарні, якщо лежать на паралельних або на одній прямій. Якщо вектори колінеарні, то їх координати пропорційні!

Перевіримо колінеарність векторів  $a$  і  $b$ :

$$\frac{4}{2} = \frac{14}{7} \neq \frac{2}{-1}$$

координати не пропорційні, отже вектори  $a$  і  $b$  не є колінеарними.

Перевіримо колінеарність векторів  $a$  і  $c$ :

$$\frac{0}{4} = \frac{0}{14} \neq \frac{3}{2}$$

умова колінеарності не виконується, вектори  $a$  і  $c$  не є колінеарними.

Перевіримо колінеарність векторів  $a$  і  $d$ :

$$\frac{4}{-6} = \frac{14}{-21} \neq \frac{2}{3}$$

умова не виконується, вектори  $a$  і  $d$  не є колінеарними.

Перевіримо колінеарність векторів  $b$  і  $c$ :

$\frac{0}{2} = \frac{0}{7} \neq \frac{3}{-1}$  звідси вектори  $b$  і  $c$  не є колінеарними.

Перевіримо колінеарність векторів  $b$  і  $d$ :

$$\frac{-6}{2} = \frac{-21}{7} = \frac{3}{-1} = -3$$

координати пропорційні, отже вектори  $b$  і  $d$  колінеарні.

Відповідь:  $b$  і  $d$  – Д.

**Приклад 42.8** За якого значення параметра  $n$  вектори  $a(n+5;-8;n+1)$  і  $b(5;1-n;3)$  колінеарні.

A	Б	В	Г	Д
$\pm 5$	$\pm 5; 9$	-9	5	5; 9

Розв'язування: Якщо вектори колінеарні, то їх координати пропорційні, тобто для векторів  $a(a_x; a_y; a_z)$  і  $b(b_x; b_y; b_z)$  має виконуватися умова:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

За умовою  $a(n+5;-8;n+1)$  і  $b(5;1-n;3)$  маємо

$$\frac{n+5}{5} = \frac{-8}{1-n} = \frac{n+1}{3}$$

Розв'яжемо рівняння:

$$\frac{n+5}{5} = \frac{-8}{1-n}$$

$$(n+5)(1-n) = -8 \cdot 5$$

$$n - n^2 + 5 - 5n = -40$$

$$-n^2 - 4n + 45 = 0$$

$$n^2 + 4n - 45 = 0$$

за теоремою Вієта отримаємо

$$n_1=5, n_2=-9.$$

Тепер перевіримо, чи отримані розв'язки задовольняють умову колінеарності з третьою координатою:

$$\begin{aligned} \frac{n+5}{5} &= \frac{n+1}{3} \\ \frac{5+5}{5} &= \frac{5+1}{3} \quad \frac{-9+5}{5} = \frac{-9+1}{3} \\ \frac{10}{5} &= \frac{6}{3} \quad \frac{-4}{5} \neq \frac{-8}{3} \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\frac{n+5}{5} = \frac{-8}{1-n} = \frac{n+1}{3}$$

Робимо висновок, що при  $n=5$  задані вектори  $a$  і  $b$  задовольняють умову  $\frac{n+5}{5} = \frac{-8}{1-n} = \frac{n+1}{3}$ , тому їх координати пропорційні, а самі вектори  $a(10;-8;6)$  і  $b(5;-4;3)$  колінеарні.

Відповідь: 5 – Г.

**Приклад 42.36** Дано вектори  $a(-2;0)$ ,  $b(1;-1)$  і  $c(2;3)$ .

За якого значення параметра  $k$  вектори  $2a-k\cdot b$  і  $c$  будуть колінеарними?

Розв'язування: Знайдемо координати вектора  $2a-k\cdot b$ :

$$2\vec{a} - k\vec{b} = (2 \cdot (-2) - k \cdot 1; 2 \cdot 0 - k \cdot (-1)) = (-4 - k, k)$$

Вектори  $2a-k\cdot b$  і  $c$  колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{-4-k}{2} = \frac{k}{3}$$

$$(-4-k) \cdot 3 = k \cdot 2$$

$$-12 - 3k = 2k$$

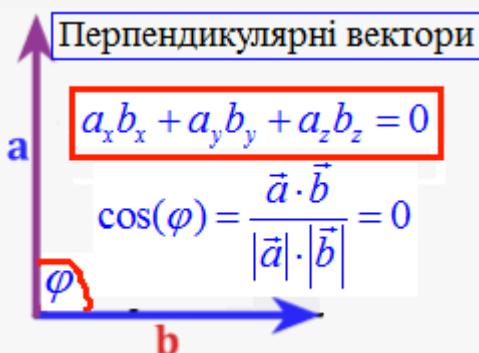
$$-3k - 2k = 12$$

$$-5k = 12$$

$$k = 12 : (-5) = -2,4$$

При  $k=-2,4$  вектори  $2a-k\cdot b$  і  $c$  (тобто  $2a-k\cdot b=(-1,6;-2,4)$  і  $c(2;3)$ ) будуть колінеарними.  
Відповідь: -2,4.

### Умова перпендикулярності векторів $a \cdot b = 0$



Якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток  $a \cdot b = 0$  рівний нулю:

$$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0.$$

Інша умова, що також вимагає обчислення скалярного добутку полягає в тому, що косинус кута між перпендикулярними векторами рівний нулю  
 $\cos(phi)=0$ .

**Приклад 1.** Чи перпендикулярні вектори?

$$1. a(-2;3;0), b(6;4;-11);$$

$$2. c(-8;5), d(1;7).$$

**Розв'язання:** Обчислюємо скалярний добуток векторів  $a, b$ :

$$a \cdot b = -2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot (-11) = 0.$$

Вектори перпендикулярні  $a \perp b$ , оскільки їх скалярний добуток рівний нулю.

Перевіримо другу пару векторів, обчислимо скалярний добуток

$$c \cdot d = -8 \cdot 1 + 5 \cdot 7 = 27.$$

Робимо висновок, що вектори  $c, d$  не перпендикулярні, оскільки ознака перпендикулярності не виконується

$$c \cdot d = 27 \neq 0.$$

Далі розглянемо тести із ЗНО підготовки, де потрібно перевірити умову перпендикулярності.

**Приклад 42.11** При якому значенні  $x$  вектори  $a(2;x)$  і  $b(-4;10)$  перпендикулярні?

A	Б	В	Г	Д
-5	-0,8	0,8	5	20

**Розв'язування:** Вектори  $a(2;x)$  і  $b(-4;10)$  будуть перпендикулярними ( $a \perp b$ ), якщо їх скалярний добуток дорівнюватиме нулю:

$$a \cdot b = 0$$

З умови перпендикулярності  $a \cdot b = 2 \cdot (-4) + x \cdot 10 = 0$  обчислюємо параметр  $x$ :

$$-8 + 10x = 0,$$

$$10x = 8,$$

$x=8:10=0,8.$

Відповідь: 0,8 – В.

**Приклад 42.27** Установити відповідність між значеннями числа  $x$  (1–4), та парами векторів (А–Д), які за цих значень взаємно перпендикулярні.

- |      |   |
|------|---|
| 1. 8 | A. $\vec{a}_1(2; x; -1)$ , $\vec{b}_1(-3; 2; x)$  |
| 2. 6 | B. $\vec{a}_2(-4; 5; 2x)$ , $\vec{b}_2(6; x; -1)$ |
| 3. 5 | C. $\vec{a}_3(-x; 4; 2)$ , $\vec{b}_3(6; 3; -3x)$ |
| 4. 1 | D. $\vec{a}_4(2; 3x; 1)$ , $\vec{b}_4(x; 1; -25)$ |
|      | $\vec{a}_5(x; -10; 1)$ , $\vec{b}_5(4; 1; -30)$   |

**Розв'язування:** Умова перпендикулярності векторів  $a_n(a_1; a_2; a_3)$  і  $b_n(b_1; b_2; b_3)$ :

$a \perp b$ , якщо  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ .

Для кожної пари векторів обчислюємо скалярний добуток векторів і прирівнюємо його до нуля.  
Отримане рівняння розв'язуємо відносно "ікс"

A.  $\vec{a}_1(2; x; -1)$ ,  $\vec{b}_1(-3; 2; x)$

$$2 \cdot (-3) + x \cdot 2 + (-1) \cdot x = 0$$

$$-6 + 2x - x = 0$$

$$2x - x = 6$$

$$x = 6 \quad | \quad 2$$

B.  $\vec{a}_2(-4; 5; 2x)$ ,  $\vec{b}_2(6; x; -1)$

$$-4 \cdot 6 + 5 \cdot x + 2x \cdot (-1) = 0$$

$$-24 + 5x - 2x = 0$$

$$5x - 2x = 24$$

$$3x = 24, \quad x = 8 \quad | \quad 1$$

C.  $\vec{a}_3(-x; 4; 2)$ ,  $\vec{b}_3(6; 3; -3x)$

$$-x \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-3x) = 0$$

$$-6x + 12 - 6x = 0$$

$$-6x - 6x = -12$$

$$-12x = -12, \quad x = 1 \quad | \quad 4$$

D.  $\vec{a}_4(2; 3x; 1)$ ,  $\vec{b}_4(x; 1; -25)$

$$2 \cdot x + 3x \cdot 1 + 1 \cdot (-25) = 0$$

$$2x + 3x - 25 = 0$$

$$2x + 3x = 25$$

$$5x = 25, \quad x = 5 \quad | \quad 3$$

Записуємо відповідь до тестів:

1 – Б, 2 – А, 3 – Г, 4 – В.

**Приклад 42.37** Знайти площину паралелограма, побудованого на векторах  $AB(3; 0; -4)$  і  $AD(0; 5; 0)$ .

**Розв'язування:** Знайдемо скалярний добуток векторів  $AB(3; 0; -4)$  і  $AD(0; 5; 0)$ :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + (-4) \cdot 0 = 0 + 0 - 0 = 0$$

він рівний нулю.

Це означає, що вектори перпендикулярні  $AB \perp AD$  і паралелограм  $ABCD$  є прямокутником.

Знайдемо модуль (довжину) вектора  $AB(3; 0; -4)$ :

$$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5$$

Знайдемо модуль (довжину) вектора  $AD(0;5;0)$ :

$$|\vec{AD}| = \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{5^2} = 5$$

Оскільки у прямокутника дві сусідні сторони рівні, то він є квадратом. Знайдемо площину заданого паралелограма (квадрата)  $ABCD$ :

$$S = |\vec{AB}|^2 = 5^2 = 25$$

Відповідь: 25.

### Домашнє завдання:

Написати конспект.

### Зворотній зв'язок

E-mail [vitasergiiivna1992@gmail.com](mailto:vitasergiiivna1992@gmail.com)

**!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.**