

**10.05.2022**

**Група 32**

**Математика (алгебра)**

**Урок 55-56**

**Тема:** Повторення. Похідна, дослідження функцій.

### **Матеріали до уроку:**

Розв'язування прикладів на похідні не обходить без таблиці похідних.

1.  $(c)' = 0;$
2.  $(x)' = 1;$
3.  $(u \pm v)' = u' \pm v';$
4.  $(cu)' = cu';$
5.  $(uv)' = u'v + v'u;$
6.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

24.

7.  $\left(\frac{c}{x}\right)' = -\frac{c}{x^2}$
8.  $(x^n)' = nx^{n-1}$
9.  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
10.  $(c^x)' = c^x \cdot \ln c; c > 0, c \neq 1$
11.  $(e^x)' = e^x$
12.  $(\log_c x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_c e = \frac{1}{x \ln c}$

$$\begin{aligned} y &= f(u(x)), \\ y' &= f'(u) \cdot u'_x \end{aligned}$$

13.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
14.  $(\sin x)' = \cos x$
15.  $(\cos x)' = -\sin x$
16.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
17.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
18.  $(\sec x)' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$
19.  $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x$
20.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
21.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
22.  $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$
23.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Її завжди слід мати видрукованою під рукою і користуватися при обчисленнях як шпаргалкою.

Голова не смітник, і всього що вчать не запам'ятати, а от вміти користуватися формулами та правильно знаходити похідні може навчитися кожен школяр і студент. Перші дві формули прості, перша говорить, що похідна від сталої рівна 0, друга - похідна "ікса" рівна одиниці. Далі йдуть формули похідних суми, добутку та частки, їх застосовують коли задану функцію можна подати у вигляді суми, добутку чи частки функцій.

Окремий урок ми приділимо похідній складеної функції (24), а поки що ознайомтеся з формuloю як її знаходить

$$y = f(\varphi(x))$$

$$y' = f'_{\varphi} \cdot \varphi'_x$$

Далі на поширеніх з практичних прикладах навчимо Вас користуватися усіма приведеними тут формулами.

### **Похідна суми, добутку та частки функцій**

**Приклад 1** Знайдіть похідну

$$y = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x.$$

Розв'язування: Використовуємо 2 та 8 формули та правила 3,4

$$\begin{aligned} y' &= (x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x)' = \\ &= (x^5)' - (4x^3)' + (2x^2)' - (7x)' = \\ &= (x^5)' - 4(x^3)' + 2(x^2)' - 7(x)' = \\ &= 5x^4 - 12x^2 + 4x - 7. \end{aligned}$$

Отримали похідну

$$y' = 5x^4 - 12x^2 + 4x - 7.$$

### Приклад 2 Обчисліть похідну

$$y = \sqrt{3x}.$$

Розв'язування: Тут напряму формулу (9) не використаємо. Але можемо звести під формулу складеної функції.

Якщо  $y = f(u(x))$ , то похідна рівна  $y' = f'_u \cdot u'_x$ .

Для кореневої функції  $y = \sqrt{3x}$  виконуємо заміну:

$$u = 3x, \text{ тоді } y = \sqrt{u}.$$

Тоді за формулою (9) похідна рівна

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{3x})' = (u = 3x)' = (\sqrt{u})' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} u' = \frac{1}{2\sqrt{3x}} (3x)' = \frac{3}{2\sqrt{3x}} \end{aligned}$$

### Приклад 3 Обчисліть похідну

$$y = 5^{3x} + 7^{2x}.$$

Розв'язування: Застосуємо десяту формулу для обчислення похідної показникової функції, тільки

пам'ятаємо, що в степені не 1-ші, тому додатково домножуємо на похідну степеня  $(3x)' = 3, (2x)' = 2$ .

$$y' = (5^{3x} + 7^{2x})' = 5^{3x} \cdot \ln 5 \cdot (3x)' + 7^{2x} \cdot \ln 7 \cdot (2x)' =$$

$$= 3 \cdot 5^{3x} \cdot \ln 5 + 2 \cdot 7^{2x} \cdot \ln 7.$$

Спершу важко читати та зрозуміти як знаходили похідну, але вивчивши формулі та правила, все стає зрозумілим.

### Приклад 4 Знайдіть похідну функції

$$y = (x^2 - 2x + 3)^5.$$

Розв'язування: На практиці ніхто з Вас не буде піднімати квадратний тричлен  $x^2 - 2x + 3$  до 5

степеня, а тоді обчислювати похідну. За формулою складеної функції, перепозначимо:

$$y = u^5, u = x^2 - 2x + 3.$$

Тоді похідна рівна

$$y' = (u^5)'_u (x^2 - 2x + 3)'_x = 5u^4(2x - 1) = 10(x - 1)(x^2 - 2x + 3)^4$$

Простіше вже бути не може.

Перейдемо до вивчення **правила похідної добутку функцій**

$$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (5)$$

### Приклад 5 Знайти похідну за правилом добутку функцій

$$y = (1 - x^3) \cdot (x^4 + 4x).$$

Розв'язування: На початках для простоти обчислень, можете виконувати заміни:

$$u = 1 - x^3, v = x^4 + 4x, \text{ тоді } y = u \cdot v.$$

Далі за формулою похідної добутку функцій

$$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

обчислити похідні та підставити в праву сторону.

Спробуйте виконати так для кількох добутків функцій і Ви навчитеся обходитися без покрокового обчислення. Тоді Ваша відповідь прийде до наступного вигляду

$$\begin{aligned} y' &= [(1 - x^3)(x^4 + 4x)]' = \\ &= (1 - x^3)'(x^4 + 4x) + (x^4 + 4x)'(1 - x^3) = \\ &= -3x^2(x^4 + 4x) + (4x^3 + 4)(1 - x^3) = \\ &= -7x^6 - 12x^3 + 4. \end{aligned}$$

Спершу це важко зробити без помилок, але ми для того і вчимося, щоб вміти робити те, про що раніше не знали.

**Приклад 6** Обчислити похідну функції

$$y=x^2 \cdot \ln(x+5).$$

Розв'язування: Застосуємо правило похідної добутку та формулу для логарифма (13). Перед переглядом відповіді можете самостійно знайти похідну, поклавши

$$y=u \cdot v, u=x^2, v=\ln(x+5) \text{ в формулу (5).}$$

Звірте чи отримали ту ж відповідь.

$$y'=(u \cdot v)'=u' \cdot v+u \cdot v'$$

$$y'=(x^2)' \cdot \ln(x+5)+x^2 \cdot (\ln(x+5))'=$$

$$=2x \cdot \ln(x+5)+x^2 \cdot 1/(x+5) \cdot (x+5)'=$$

$$=2x \cdot \ln(x+5)+x^2/(x+5).$$

З формулі слідує, що якщо при аргументу "x" немає множника, а лише стала як доданок, то похідну можна не брати, тобто

$$(x+5)'=1,$$

а одиниця як множник "погоди" в похідну не вносить.

Познайомимося на кількох прикладах з формулою похідної частки функцій

$$y'=(u/v)'=(u' \cdot v-u \cdot v')/v^2 \quad (11)$$

**Приклад 7** Обчислити похідну функції

$$y=(1+x^2)/(1-x^2).$$

Розв'язування: За правилом похідної частки в чисельнику дістанемо

$$(1+x^2)*(1-x^2)'+(1+x^2)'*(1-x^2),$$

в знаменнику похідної буде квадрат знаменника заданої функції.

Після розписання похідних та групування подібних доданків, остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1-x^2)(1+x^2)'-(1+x^2)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}= \\ &= \frac{(1-x^2)2x-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{4x}{(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

І так для всіх часток функцій, що Вам зустрічаються.

**Приклад 8** Обчислити похідну функції

$$y=\cos(x)/(x^2+2x+3).$$

Розв'язування: Правило похідної частки дає наступний алгоритм обчислень.

В чисельнику похідної отримаємо

$$\cos(x)*(x^2+2x+3)'+(\cos(x))'*(x^2+2x+3),$$

в знаменнику квадрат знаменника, що заданий.

Знаходимо похідні та розписуємо

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos(x))' \cdot (x^2+2x+3)+\cos(x) \cdot (x^2+2x+3)'}{(x^2+2x+3)^2}= \\ &= \frac{-\sin(x) \cdot (x^2+2x+3)+\cos(x) \cdot (2x^2+2x)}{(x^2+2x+3)^2}= \\ &= \frac{2x\cos(x) \cdot (x+1)-\sin(x) \cdot (x^2+2x+3)}{(x^2+2x+3)^2} \end{aligned}$$

**Додатково опрацювати:**

<https://yukhym.com/uk/doslidzhennya-funktsiji/doslidzhennya-funktsiji-pobudova-grafika.html>