

12.05.2022

Група 33

Математика (геометрія)

Урок 62-64

Тема: Повторення. Об'єми многогранників та тіл обертання

Матеріали до уроку:

Задача 6.7 Осьовим перерізом циліндра є квадрат, сторона якого дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм циліндра.

| | | | | |
|-------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| A $100\pi \text{ см}^3$ | Б $250\pi \text{ см}^3$ | В $80\pi \text{ см}^3$ | Г $150\pi \text{ см}^3$ | Д $200\pi \text{ см}^3$ |
|-------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|

Розв'язання: За умовою маємо циліндр діаметром 10 см та висотою 10 см. Об'єм циліндра знаходимо за формулою

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot H.$$

Підставляємо дані та обчислюємо об'єм

$$V = \pi \cdot 10^2 \cdot 10 / 4 = 250\pi (\text{см}^3).$$

Варіант Б є відповідю до тесту.

Задача 6.8 (Т-06, 31) Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням куба навколо свого ребра, довжина якого a .

| | | | | |
|----------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| A $4a^3$ | Б πa^3 | В $2\pi a^3$ | Г $2\pi a^3$ | Д $4\pi a^3$ |
|----------|-------------|--------------|--------------|--------------|

Розв'язання: В результаті обертання отримаємо циліндр з радіусом круга рівним діагоналі грані куба та висотою у ребро. Спершу знаходимо радіус циліндра

$$R = a\sqrt{2}; H = a$$

Далі обчислюємо об'єм куба

$$V = \pi (a\sqrt{2})^2 \cdot a = 2\pi a^3$$

Правильну відповідь містить варіант В тесту.

Задача 6.9 Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням круга навколо свого діаметра, довжина якого дорівнює a см.

| A | Б | В | Г | Д |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| $\frac{4}{3}\pi a^3 \text{ см}^3$ | $\frac{2}{3}\pi a^3 \text{ см}^3$ | $\frac{1}{3}\pi a^3 \text{ см}^3$ | $\frac{1}{6}\pi a^3 \text{ см}^3$ | $\frac{1}{12}\pi a^3 \text{ см}^3$ |

Розв'язання: Фігурою обертання круга навколо діаметра є сфера. Радіус сфери рівний половині діаметра круга

$$R = a/2.$$

Далі виконуємо підстановку радіуса в формулу об'єму сфери

$$V = \frac{2}{3}\pi (R^3) = \frac{2}{3}\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{1}{12}\pi a^3 (\text{см}^3).$$

Отримали залежність яка відповідає варіанту Д тестових відповідей.

Відповідь: Д.

Задача 6.10 У прямокутника відношення сторін дорівнює $a:b$, $a < b$. Його спочатку обертають навколо більшої сторони, а потім навколо меншої. Знайдіть відношення об'єму першого утвореного тіла до об'єму другого.

| A | Б | В | Г | Д |
|----------------------------------|------------------------------|------------------------------|---------------|-------------------------------------|
| $\pi \left(\frac{a}{b}\right)^3$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ | $\frac{a}{b}$ | Відповідь не залежить від a і b |

Розв'язання: Фігурою обертання і першому, і другому випадку є циліндр. Перший має радіус в основі a і висоту b , другий навпаки. Їх об'єми знаходимо за формулою

$$V_1 = \pi a^2 b;$$

$$V_2 = \pi b^2 \cdot a.$$

Далі знаходимо відношення об'ємів циліндрів

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi a^2 b}{\pi b^2 a} = \frac{a}{b}.$$

Варіант Г тестів містить правильну відповідь.

Задача 6.25 Прямокутний паралелепіпед з довжиною ребер 5 см, 7 см і 9 см складено з кубиків з довжиною ребра 1 см.

Скільки доведеться забрати кубиків, щоб вилучити весь зовнішній шар товщиною в один кубик?

Розв'язання: Завдання одночасно і доволі просте і складне, якщо піти неправильним шляхом.

Додаткової побудови виконувати не потрібно, завдання і без цього зрозуміле.

Можна обчислити покроково поверхні паралелепіпеда, але це довгий і неправильний шлях.

Простіше знайти об'єм заданого паралелепіпеда і внутрішнього.

Для обчислення внутрішнього потрібно знайти його сторони, які рівні заданим мінус 2 сантиметри (здогадайтесь чому).

В результаті знаходимо об'єми

$$V=5*7*9=315 \text{ (сантиметрів кубічних);}$$

$$V_1=3*5*7=105 \text{ (сантиметрів кубічних).}$$

Різниця об'ємів точно рівна кількості кубиків з ребром в 1 см

$$315-105=200.$$

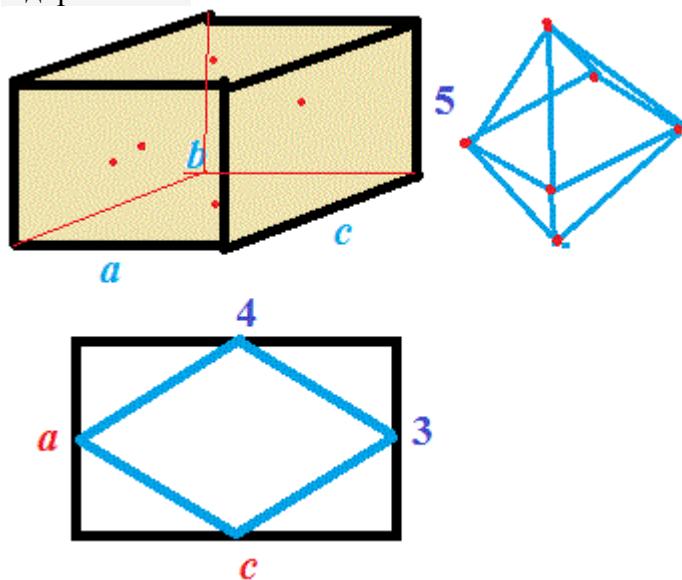
Добре проаналізуйте для себе дану задачу.

Схема обчислень дозволяє зекономити багато часу на тестах і зрозуміла для пояснення школярам.

Відповідь: 200.

Задача 6.26 Обчисліть об'єм многогранника (у см), усі вершини якого лежать у центрах граней прямокутного паралелепіпеда з вимірами 3 см, 4 см, 5 см.

Розв'язання: Важко спершу уявити, що потрібно обчислювати, проте побудова багато на що відкриває очі.



Об'єм потрібної фігури рівний об'єму двох пірамід в основі яких ромб, причому діагоналі ромба рівні сторонам грані паралелепіпеда - 3 і 4 см.

Висота кожної з пірамід рівна половині висоти сторони $5/2=2,5 \text{ см.}$

Площа ромба рівна половині площин прямокутника (випливає з побудови)

$$S=3*4/2=6 \text{ (сантиметрів квадратних).}$$

Далі знаходимо об'єм потрібної фігури

$$V=1/3*6*2,5*2=10 \text{ (сантиметрів кубічних).}$$

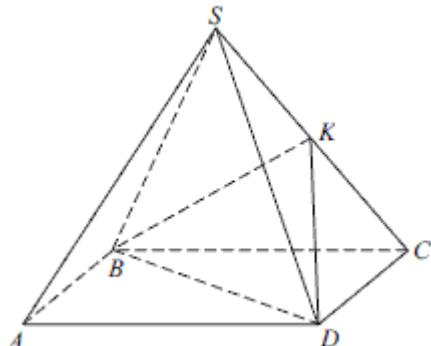
Простіших міркувань для обчислення задачі з планіметрії і бути не може. Великим плюсом в обчисленнях є виконання побудови до умови задачі.

Це дозволяє спростити знаходження площ, об'ємів до кількох простих і зрозумілих усім дій.

Привчайте себе виконувати побудову в прикладах з геометрії, планіметрії.

Відповідь: 10.

Задача 6.27 Об'єм правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ дорівнює 60 м^3 . Точка K - середина ребра SC . Обчисліть об'єм піраміди $KBCD$, у см 3



Розв'язання: Розв'язок можна знайти з пропорцій піраміди - це найлегший шлях.

Запам'ятайте: Формула об'єму циліндрів, паралелепіпедів, пірамід – це завжди добуток площини основи на висоту і на певний коефіцієнт, який визначає фігуру.

В нашому випадку в основі піраміди квадрат, діагональ якого розбиває основу на рівні за площею трикутники. Висота трикутної піраміди рівна половині висоти правильної чотирикутної - це випливає з пропорції.

Звідси об'єм трикутної піраміди рівний четвертій частині об'єму повної $V_1 = V/(2*2) = 60/4 = 15$ (сантиметрів кубічних).

Таким чином знайти об'єм піраміди без складних формул можна завжди, головне знати властивості фігур. В подібних завданнях старайтесь використовувати пропорції, прості закономірності, які дозволяють в швидкий час вписати нові формули, зробити правильні висновки та в легкий спосіб отримати правильний результат.

Відповідь: 15.

Задача 6.36 Бічна поверхня циліндра у розгортаці є прямокутником. Діагональ

прямокутника дорівнює $\frac{3\sqrt{4\pi}}{2}$ і утворює з основою прямокутника кут 30° . Обчисліть об'єм циліндра. Відповідь округліть до сотих.

Розв'язання: Довжина однієї із сторін прямокутника рівна довжині кола при основі, тобто $2\pi r$. Те, що кут при основі рівний 30 градусів означає, що висота циліндра рівна половині гіпотенузи

$$H = \frac{\sqrt[3]{4\pi}}{2}.$$

Квадрат радіусу кола при основі, який фігурує в формулі об'єму знаходимо як катет прямокутного трикутника

$$(2\pi r)^2 = \sqrt[3]{(4\pi)^2} - \frac{\sqrt[3]{(4\pi)^2}}{4} = \frac{\sqrt[3]{(4\pi)^2}}{4} \rightarrow$$

$$r^2 = \frac{\sqrt[3]{(4\pi)^2}}{4 \cdot 4\pi^2} = \frac{3}{4\pi\sqrt[3]{4\pi}}.$$

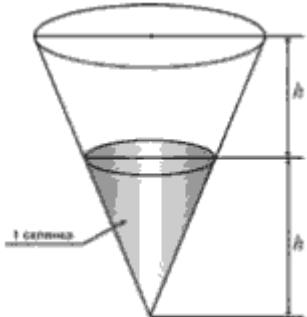
Знаходимо об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi \frac{3}{4\pi\sqrt[3]{4\pi}} \frac{\sqrt[3]{4\pi}}{2} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Якщо округлити до сотих то отримаємо $V=0,13$.

Можливо на цьому округленні укладачі тестів хотіли підловити та заставити сумніватися в правильності обчислень вступників.

Задача 6.37 На рисунку зображене ємність, у яку налито одну склянку рідини. Обчисліть, на яку кількість повних склянок рідини розрахована ця ємність.



Розв'язання: Наведена ємність має форму конуса, Об'єм якого можна

описати формулою

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Оскільки склянка вміщується в менший конус, то з пропорцій бачимо, що радіус основи великого конуса, як і його висота в два рази більші за вказані

$$R = 2r; H = 2h.$$

Об'єм конуса рівний

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi R^2 H = 8 \cdot V_1.$$

Отже конус розрахований на 8 склянок рідини.

Домашнє завдання:

Опрацювати додатково задачі за посиланнями:

- <https://yukhym.com/uk/zno-matematika/zno-zadachi-na-obemi.html>
- <https://yukhym.com/uk/zno-matematika/zno-2015-matematika-piramida-konus-sfera.html>
- <https://yukhym.com/uk/zno-matematika/zno-matematika-zadachi-na-pobudovu-z-stereometriji.html>

Зворотній зв'язок

E-mail vitasergiiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забувати вказувати прізвище, групу і дату уроку.