17.05.2022
Група М-1
Вища математика
Урок 96-97
Тема: Лінійні диференціальні рівняння першого та другого порядку.

Матеріали до уроку:

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку називається *лінійним*, якщо воно має вигляд:

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad (2.8.2)$$

де $f(x)$й $g(x)$ – деякі (неперервні) функції змінної x.

Розглянемо один з можливих способів розв'язання рівняння: будемо шукати рішення у вигляді $y = u(x) \cdot v(x)$, тим самим шуканими стають функції $u(x)$ і $v(x)$, одна з яких може бути обрана довільно, а інша – повинна визначатися з рівняння (2.8.2). Тобто використовується в рішенні заміна $y = uv;\ y' = u'v + v'u$.

Приклад 2.8.2. Розв'язати рівняння: $xy' - 2y = 2x^4$.

Розв'язання. Розділивши ліву і праву частини на x приходимо до лінійного неоднорідного рівняння:

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3.$$

Нехай $y = uv$, $y' = u'v + v'u$, тоді рівняння прийме вид:

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = 2x^3 \text{ або } u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = 2x^3.$$

Користуючись тим, що одну з допоміжних функцій (наприклад v) можна вибрати довільно, підберемо її так, щоб вираження в дужках обернулося в нуль, тобто в якості v візьмемо одне із частинних рішень рівняння зі змінними, що розділяються.

$$v' - \frac{2}{x}v = 0 \text{ або } \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x};\ \text{звідки:}\ \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}.$$

Якщо проінтегруємо обидві частини рівності, знайдемо частинне рішення цього рівняння, наприклад, при $c = 0$ $\ln|v| = 2\ln|x|$, звідки $v = x^2$.

При $v = x^2$ вихідне рівняння звернеться в рівняння:

$$u'x^2 = 2x^3 \text{ або } \frac{du}{dx} = 2x.$$

Розв'язуючи це рівняння зі змінними, що розділяються, одержуємо $u = x^2 + c$. Тоді остаточно маємо:

$$y = uv = (x^2 + c)x^2 = x^4 + cx^2.$$

Лінійне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$y'' + py' + gy = r(x) \qquad (2.9.1)$$

де p, g – деякі дійсні числа, $r(x)$ – деяка функція. Ми будемо розглядати однорідні рівняння ($r(x) \equiv 0$), тобто рівняння виду

$$y'' + py' + gy = 0 \qquad (2.9.2)$$

Розглянемо ***розв'язок лінійного однорідного рівняння*** із сталими коефіцієнтами.

Для знаходження загального розв'язка однорідного рівняння виписуємо його характеристичне рівняння:

$$k^2 + pk + g = 0.$$

Знаходимо його корені. При цьому, якщо:

1. Корні дійсні і різні, тобто $k_1 \neq k_2$, тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} \qquad (2.9.3)$$

2. Корні дійсні і кратні, тобто $k_1 = k_2 = k$, тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = e^{kx}(c_1 x + c_2) \qquad (2.9.4)$$

3. Корні комплексні, тобто $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \qquad (2.9.5)$$

Приклад 2.9.1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Розв'язання. Запишемо і вирішимо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = 2.$$

Тоді загальний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}.$$

Приклад 2.9.2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$

Розв'язання. $k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k-2)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 2$ – корні кратні, дійсні $\Rightarrow y = e^{2x}(c_1 x + c_2)$ – загальний розв'язок.

Приклад. Знайти загальне (чи частинне) рішення диференціального рівняння другого порядку :

а) $y'' + 2y' - 3y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$ і $y'(0) = 2$; б) $y'' + 2y' + y = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Розв'язування. а) Знайдемо характеристичне рівняння і його корені : $k^2+2k-3=0 \to k_1=1$ і $k_2=-3$.

Таким чином, загальне рішення рівняння – $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$.

Оскільки $y'=C_1e^x-3C_2e^{-3x}$, тоді з початкових умов знайдемо: $\begin{cases} y(0)=1, \\ y'(0)=2 \end{cases} \to \begin{cases} C_1+C_2=1, \\ C_1-3C_2=2 \end{cases} \to \begin{cases} C_1=\dfrac{5}{4}, \\ C_2=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$. Тоді частинне рішення $y=\dfrac{5}{4}e^x-\dfrac{1}{4}e^{-3x}$;

б) Оскільки $k^2+2k+1=0$ і $k_1=\ k_2=-1$, тоді загальне рішення рівняння – $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$;

в) Оскільки $k^2+2k+5=0$ і $k_1=-1+2i\ \ k_2=-1-2i$, тоді загальне рішення рівняння – $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}$.

Загальне рішення неоднорідного рівняння визначається формулою

$$y=y_0+Y, \tag{3.20}$$

де y_0 – загальне рішення однорідного рівняння , а Y – частинне рішення рівняння.

Домашнє завдання:
Зробити конспект

Зворотній зв'язок
E-mail vitasergiivna1992@gmail.com
!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.