18.05.2022
Група М-1
Вища математика
Урок 100-101
Тема: Збіжні та розбіжні числові ряди.

Матеріали до уроку:

Ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots$$

називається додатним, якщо всі його члени невід'ємні $U_n \geq 0 \ (n = 1,2,3,\ldots)$.

Для того, щоб визначити чи ряд збіжний чи розбіжний в літературі зібрані правила, які дозволяють це швидко. Розглянемо по черзі ознаки збіжності числових рядів.

Ознака порівняння

Розглянемо два ряди з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n + \ldots$$

Для них виконуються наступні твердження:

1. Якщо члени ряду U_n не більші відповідних членів V_n збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ ($U_n \leq V_n$), то ряд U_n = $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ збігається.

Якщо кожний член ряду $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ більший (або рівний) відповідного члена розбіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, то цей ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ розбігається.

Дослідження збіжності ряду

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряди

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 3n}.$

Розв'язок. Порівняємо заданий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 3n} = \frac{1}{3+3} + \frac{1}{3^2+6} + \frac{1}{3^3+9} + \ldots$$

з рядом геометричної прогресії, знаменник якої рівний *q=1/3*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots$$

Кожен член першого ряду менший за відповідний член ряду геометричної прогресії, який збігається, оскільки *q=1/3<1*

$$\frac{1}{3^n+3n}<\frac{1}{3^n}\ (n=1,2,3,\ldots).$$
За ознакою порівняння перший ряд збіжний.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$

Розв'язок. Члени даного ряду порівнюємо з відповідними гармонічного ряду. Для довільного *n>1* виконується нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}.$$

Так як гармонічний ряд розбіжний, то відповідно до ознаки порівняння заданий ряд також розбіжний. Ознака порівняння - це найпростіша з ознак, які дозволяють швидко встановити збіжність ряду.

Гранична ознака порівняння

Нехай ряди *Un*= $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ та *Vn*= $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ додатні, а також існує скінчена границя їх частки *limit=k*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=k$$

причому *k* відмінне від нуля число $k\neq 0, k\neq\infty$, тоді обидва ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 5^n+5n^2}.$$

Розв'язок. Для порівняння виберемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ збіжної геометричної прогресії. Застосовуючи граничну ознаку, обчислюємо границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{3\cdot 5^n+5n^2}=\lim\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\left(1+\frac{5n^2}{5^n}\right)}=\frac{1}{3}.$$

Оскільки обидва ряди ведуть себе рівносильно *k=1/3*, а геометричний ряд збіжний, то і розглянутий ряд також збіжний.

Ознака Даламбера

Нехай члени ряду U_n

$$\sum_{n=1}^{\infty}U_n=U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n+\ldots$$

додатні і відношення *n+1*-го члену до попереднього *n*-го має скінченну границю при номері прямуючому до безмежності $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=k.$$

В залежності від значення границі (*k*) робимо висновки про збіжність чи розбіжність ряду

- Якщо *k<1*, то ряд збігається.
- Якщо *k>1* - ряд розбігається.
- При *k=1*треба застосовувати іншу ознаку збіжності, оскільки дана ознака не може визначити чи збіжний ряд чи розбіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряди

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)2^n}+;$

Розв'язок. Знайдемо границю *n+1* члена ряду до *n*-го при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{(n+3)2^{n+1}}\frac{(n+2)2^n}{(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{2\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Оскільки границя *k=1/2<1*, то ряд збіжний.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!};$

Розв'язок.Обчислимо границю частки загального члена ряду до попереднього

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+3)!}\frac{(n+2)!}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+3}=0.$$

Ряд збіжний, так як границя менша одиниці *k=0<1*.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-4}{\sqrt{n\cdot 3^n}}.$

Розв'язок. Застосуємо ознаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5(n+1)-4}{\sqrt{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}\frac{\sqrt{n\cdot 3^n}}{5n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+1)\sqrt{n}}{\sqrt{3}(5n-4)\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Бачимо, що ряд збіжний, оскільки границя менша за одиницю $k=1/\sqrt{3}<1.$

Радикальна ознака Коші

Якщо для ряду U_n= $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ з додатними членами існує границя кореня *n*-го порядку *limit=k*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=k$$

то при *k<1* ряд збіжний, а при *k>1* - розбіжний.
При *k=1* потрібно застосовувати іншу ознаку збіжності.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряди

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+2}\right)^n;$

Розв'язок. Застосуємо радикальну ознаку Коші та обчислюємо границю

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3+\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}.$$

Ряд збіжний, оскільки отримали *k=2/3<1*.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n^n}}.$

Розв'язок. Обчислимо границю кореня з загального члена ряду

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt{n^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{\frac{n}{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

Вона рівна нулю, отже робимо висновок про збіжність ряду.

Інтегральна ознака Коші

Нехай задано ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots,$$

причому *f(x)* додатна, неперервна і монотонно спадна функція від $x \in [1; \infty)$.

Тоді ряд

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збіжний, якщо невластивий інтеграл

$\int_1^{\infty} f(x)dx$ збіжний (приймає скінченне значення);

(2) ряд розбіжний, коли інтеграл розбіжний. Під збіжністю інтегралу слід розуміти його обмеженість, тобто

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx \neq \infty.$$

Розглянемо приклади застосування інтегральної ознаки Коші.

Приклад 5. Дослідити на збіжність

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 4n + 5};$

Розв'язок. Застосуємо інтегральну ознаку Коші (знаходимо інтеграл)

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5} = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{2dx}{(2x+1)^2 + 2^2} =$$

$$\frac{1}{4} \arctan\left(\frac{2x+1}{2}\right)\Bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right) \approx 0{,}1468.$$

Ряд збіжний, оскільки інтеграл збіжний *(=0,1468).*

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4}};$

Розв'язок. Знайдемо означений інтеграл від загального члена ряду

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 4}\right|\Bigg|_1^{\infty} = \infty.$$

Він рівний безмежності, а це значить, що за інтегральною ознакою Коші ряд розбіжний.

3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^4+4}.$$

Розв'язок. Обчислимо інтеграл, для цього виконаємо заміну змінних в підінтегральній функції. В результаті отримаємо арктангенс половини аргументу, який у межах інтегрування приймає скінченне значення

$$\int_1^{\infty}\frac{2xdx}{x^4+4}=\left\{\begin{aligned}u&=x^2\\du&=2xdx\end{aligned}\right\}=\int_1^{\infty}\frac{du}{u^2+2^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right)\Bigg|_1^{\infty}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)\approx 0{,}5532.$$

Даний ряд збіжний, оскільки *Integral=0,5532*.

Виористовуйте наведені ознаки збіжності рядів, аналізуйте самостійно ряди і з часом Ви почнете їх розрізняти інтуітивно.

Домашнє завдання.

- Зробити конспект

Зворотній зв'язок

E-mail vitasergiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.