18.05.2022
Група М-1
Вища математика
Урок 98-99
Тема: Поняття числового ряду

Матеріали до уроку:

Нехай задана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ Нескінченна сума чисел виду $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$- **називається числовим рядом**, а числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$- **членами ряду.**

Ряд позначають так: $\sum_{i=1}^{n} u_n.$

Вираз для n- го члена ряду при довільному натуральному $n>0$,
називається **загальним членом ряду** і позначається u_n.
Загальний член ряду можна задати формулою $u_n=f(n)$, з допомогою якої записується довільний член ряду.
Суму n перших його членів позначають через S_n:
$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$.
і прийнято називати n-ою частинною сумою ряду.
Часткові суми ряду утворюють деяку числову послідовність його часткових сум S_n.
Ряд називається збіжним, якщо збігається послідовність його часткових сум S_n, тобто якщо існує скінчена границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Число S при цьому називають **сумою ряду** і записують

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} u_n.$$

При цьому вважають також, що ряд збігається до числа S.
Якщо послідовність часткових сум ряду розбігається, то **ряд називається розбіжним.** У цьому випадку ряд не має суми.
Ряд, що складений з елементів геометричної прогресії називається **геометричним рядом**:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}.$$

Число q — знаменник геометричної прогресії.
Позначимо S_n сума n перших членів прогресії та знайдемо її значення:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1};$$

$$S_n q = aq + aq^2 + \ldots + aq^n.$$

Звідси отримуємо формулу частової суми ряду

$$S_n - S_n q = a - aq^n,$$

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Якщо $|q|<1$, то суму ряду знаходимо за формулою

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$
а геометричний ряд збігається.
Якщо $|q|>1$, то сума ряду прямує до безмежності при великих номерах
$$S=\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a-aq^n}{1-q}\to\infty.$$
Якщо $q=1$, то сума теж розбіжна (прямує до безмежності)
$$S_n = a+a+a+\ldots+a = an\to\infty\ (n\to\infty).$$
Якщо $q=-1$, то маємо формулу суми, що залежить від номера
$$S_n = a-a+a-\ldots+a = \begin{cases} a,\ n=2k-1; \\ 0,\ n=2k. \end{cases}\quad (k=1,2,\ldots)$$
таким чином, послідовність часткових сум S_n - розбіжна.
Ряд вигляду
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$
називається **гармонічним рядом.** Він розбіжний.
Числовий ряд вигляду
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$
називається **узагальненим гармонічним рядом.** Доведено, що при $p<=1$ узагальнений гармонічний ряд розбігається, а при $p>1$ -ряд збігається.
Якщо ряд збігається, то різниця між сумою S і частинною сумою його S_n
$$R_n = S-S_n = u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots$$
називається n **-им залишком ряду.**
Залишок R_n ряду являє собою ту похибку, яка одержиться, якщо замість наближеного значення суми ряду S взяти суму перших n членів цього ряду. Але оскільки S є границя суми S_n, то для збіжного ряду виконується умова, що границя залишку прямує до нуля при номері прямуючому до безмежності
$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S-S_n)=0.$$
Таким чином, взявши достатньо велике число членів збіжного ряду, можна суму цього ряду обчислити з любою точністю. Звідси випливає, що основною задачею теорії рядів є дослідження збіжності ряду.

Домашнє завдання:
Зробити конспект.
Зворотній зв'язок
E-mail vitasergiivna1992@gmail.com
!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.