

20.05.2022

Група М-1

Вища математика

Урок 102-103

Тема: Збіжні та розбіжні числові ряди.

Матеріали до уроку:

Знакозмінні та знакопочергові числові ряди. Ознака збіжності Лейбніца

Окрім знакододатних рядів на практиці зустрічаються знакозмінні та знакопочергові ряди. Про них і піде мова в даній статті.

Ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

називається **знакозмінним**, якщо частина його членів приймає додатні значення, а решта - від'ємні.

Знакопочерговим називається ряд, сусідні члени якого мають протилежні знаки. У випадку, коли перший член знакопочергового ряду додатний, його можна подити у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2k+1} - a_{2k+2} + \dots, (a_n > 0, n \in N).$$

Ознака Лейбніца

Для дослідження збіжності ряду використовують **ознаку Лейбніца**: якщо члени знакопочергового ряду спадають по абсолютної величині та границя загального члена ряду рівна нулю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

то ряд збіжний. При цьому **сума ряду не перевищує значення його першого члена, якщо він додатній**.

Для знакозмінного ряду існують поняття абсолютної та відносної збіжності.

Знакозмінний (знакопочергений) ряд збіжний абсолютно, якщо цей ряд та ряд утворений з модулів членів цього ряду збіжні одночасно.

Ряд називають умовно або неабсолютно збіжним у випадках, коли збіжний лише знакозмінний ряд, а ряд складений з абсолютних величин членів ряду розбігається.

Дослідження рядів на збіжність

Приклад 1. Дослідити які ряди збігаються абсолютно, умовно чи розбігаються

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}};$$

1) (9.131)

Розв'язок. Даний ряд знакопочергений, а також кожен наступний член по модулю менший за попередній

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+2}} > \frac{1}{\sqrt{n+3}}.$$

Знайдемо границю загального члена ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0.$$

За ознакою Лейбніца ряд збіжний. Перевіримо ряд складений з модулів членів на абсолютно збіжність. **Застосуємо ознаку Даламбера**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = 1.$$

Дана ознака відповіді не дає. Застосуємо інтегральну ознакою Коші

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Ряд розбіжний, інтеграл рівний безмежності.

Оскільки знакопочережний ряд збіжний, а ряд з модулів розбіжний, то роглянутий ряд відносно збіжний.

$$2) (9.132) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2};$$

Розв'язок. Кожен наступний член ряду по модулю менший за попередній

$$\frac{1}{(2n-1)^2} > \frac{1}{(2n+1)^2} > \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Границя загального члена рівна нулеві

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 0.$$

Ознака Лейбніца виконується.

Перевіримо ряд на абсолютно збіжність. Застосуємо інтегральну ознакою Коші

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(2x-1)^2} = -\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2(2x-1)} \Big|_1^b = 0 + \frac{1}{2} = 0,5.$$

Вона підтверджує збіжність ряду. Вихідний **ряд абсолютно збіжний**.

$$3) (9.133) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n+1};$$

Розв'язок. Необхідна ознака збіжності не виконується, оскільки кожен наступний член ряду по модулю більший за попередній

$$\frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2n+3} < \frac{n+2}{2n+5}.$$

За ознакою Лейбніца ряд розбігається.

$$4) (9.134) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)\sqrt{2n+1}};$$

Розв'язок. Члени ряду по модулю спадають

$$\frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}} > \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n+3}} > \frac{1}{(2n+3)\sqrt{2n+5}}.$$

Обчислюємо границю u_n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{1}{n}\right) \sqrt{2 + \frac{1}{n}}} = 0.$$

Границя рівна нулю, отже ряд збіжний за ознакою Лейбніца.

Перевіримо на абсолютно збіжність. З вигляду бачимо, що ознака Делабера нічого не дасть.

Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Після заміни змінних під інтегралом отримаємо гіперболічний арктангенс, який на межах інтегрування приймає обмежене значення

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{2x+1}} &= \begin{cases} 2x+1=t^2 \\ dx=t dt \end{cases} = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\sqrt{3}}^b \frac{udu}{u(u^2-2)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctanh} \left(\frac{t\sqrt{2}}{2} \right) \Big|_1^b = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2} \approx 0,81. \end{aligned}$$

Даний ряд збіжний (*Integral=0,81*). Отже ряд абсолютно збіжний.

Приклад 2. Дослідити знакочережний ряд на збіжність.

a) $1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots$

Маємо $1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$

Нехай $c_n = 1/n^4$. Досліджувати цей ряд будемо за ознакою Лейбніца:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$$

ряд збігається, якщо границя n -го члена рівна нулю $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ і $c_{n>c^{n+1}} > 0$.

Перевірка показує, що умови виконуються

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\infty^4} = \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{2^4} > \frac{1}{3^4} > \frac{1}{4^4} > \dots > 0$$

звідси слідує, що ряд $1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots$ збігається.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

Досліджувати цей ряд будемо за ознакою Лейбніца:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{\ln 4} > \dots > 0$$

$$\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{\ln 4} > \dots > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$$

звідси слідує, що ряд збігається, але умовно, бо ряд складений за

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$$

модулем розбіжний.

Ознака Лейбніца. Абсолютна та умовна збіжність

Означення знакозмінного ряду: Числовий ряд вигляду $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^n * a_n + \dots$ або скорочений

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad (a_n > 0)$$

запис називається **знакозмінним** або **знакопочережним** рядом.

Теорема 2. [Лейбніца.] Якщо для знакозмінного числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ виконуються умови:

- 1) $u_n > u_{n+1}$ при $n > k \in \mathbb{N}$ (тобто абсолютно величини членів ряду спадають починаючи із деякого номера);
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$,
то ряд збігається, та його сума $S < u_1$.

В такому випадку ряд називається рядом лейбніцевого типу.

Ознака Лейбніца: Якщо члени знакопочергового ряду спадають за абсолютною величиною і границя абсолютної величини загального члена ряду дорівнює нулю, то ряд збігається

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n > a_{n+1} > 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ — збіжний} \right)$$

Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність

Теорема (Коші): Якщо ряд із модулів членів ряду збіжний $/|u_n|/$, то знакозмінний ряд також збіжний.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, (a_n > 0)$$

Означення 1: Знакозмінний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ називається абсолютно збіжним, якщо збіжний ряд складений із модулів членів знакозмінного ряду.

Означення 2: Якщо ряд складений із модулів знакозмінного ряду розбіжний, а сам знакозмінний ряд збіжний, то така збіжність називається умовною, а ряд умовно збіжним.

Приклади дослідження збіжності ряду

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Розв'язування: Даний ряд є знакозмінним рядом, кожен його наступний член по модулю $1/n < 1/(n+1) < \dots$ менший за попередній, границя при номері прямуочому до безмежності прямує до нуля.

$$1) \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

За ознакою Лейбніца знакозмінний ряд збіжний, хоча ряд складений із модулів представляє

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

собою гармонійний ряд, який розбіжний, тому досліджений ряд умовно збіжний.

Приклад 2. Дослідити ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$$

Розв'язування: Перевіряємо необхідні умови збіжності ряду

1) $a_n > a_{n+1}, n \in N$

$$\frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1} \rightarrow (n+1)^2 > n(n+2) \rightarrow$$

$$n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n \rightarrow 1 > 0$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$

Перша умова виконується – члени ряду з модулів монотонно спадають. Однак границя модуля загального члена ряду не прямує до нуля при прямуванні номера до безмежності, тому ряд за ознакою Лейбніца розбіжний.

Приклад 3. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{8n-1}$$

Розв'язування: Ряд монотонно спадає $1/7 > 2/15 > 3/23 > \dots$

Перша з необхідних умов збіжності знакозмінного ряду виконується.

Обчислимо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{8n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{8} \neq 0$$

За ознакою Лейбніца ряд розбіжний, границя n -го члена по модулю не прямує до нуля при номері прямуючому до безмежності.

Приклад 4. Дослідити на умовну та абсолютно збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}$$

Розв'язування: 1) Легко переконатися, що кожний наступний член ряду по модулю $1/(n \cdot 3^n)$ менший за попередній.

$$1/3 > 1/18 > 1/243 \dots$$

2) Для визначення абсолютної збіжності ряду застосуємо ознаку Даламбера

$$|a_n| = \frac{1}{n \cdot 3^n}, |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot 3 \cdot 3^n} = \frac{1}{3} < 1$$

Границя відношення сусідніх членів ряду за модулем менша одиниці, отже ряд складений з модулів за ознакою Даламбера збіжний.

Звідси слідує, що заданий знакозмінний ряд абсолютно збіжний.

Приклад 5. Дослідити ряд збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\ln^n 10}$$

Розв'язування: В залежності від n синус приймає як від'ємні так і додатні значення, тому даний ряд є знакозмінним.

Оцінимо загальний член ряду по модулю

$$\frac{\sin(n)}{\ln^n 10} \leq \frac{1}{\ln^n 10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\ln^n 10}$$

Ряд збіжний, як геометричний ряд $1/q^n$ з основою $q = 1/\ln 10 < 1$.

Оскільки ряд із модулів збіжний за ознакою ознакою порівняння, то заданий ряд збіжний, причому абсолютно.

Приклад 6. Довести, що ряд збіжний умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n}}$$

Розв'язування: Легко переконатися, що члени ряду за модулем спадають.

Границя загального члена ряду за модулем прямує до нуля

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} = 0$$

тому за ознакою Лейбніца ряд збіжний.

Ряд складений із модулів заданого ряду із загальним членом $a_n = 1/n^{1/5}$ є рядом Діріхле зі степенем $p = 1/5 < 1$, тому він є розбіжним. Якщо абсолютноїй ряд розбіжний, а знакозмінний ряд збіжний, то він збіжний умовно, що і слід було довести.

Як висновок з цього прикладу, можна вказати, що всі знакозмінні ряди, які за модулем можна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

порівняти з рядом Діріхле вигляду будуть абсолютно збіжними, якщо $p > 1$.

Тобто, якщо ряд з модулів спадає трохи швидше за гармонічний ряд $a_n = 1/n$ то такий знакозмінний ряд абсолютно збіжний.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$$

Приклад 7. Довести збіжність ряду

Розв'язування: Кожний наступний член ряду складеного з модулів менший за попередній $1/e > 1/e^2 > 1/e^3 \dots$

Границя n -го члена ряду прямує до нуля

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

тому за ознакою Лейбніца знакозмінний ряд збіжний.

Для дослідження на абсолютно збіжність застосуємо радикальну ознакою Коші

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e^n}} = \frac{1}{e}$$

Зауважте, що вона ефективна лише у випадках коли члени ряду можна представити як певну скінченну величину в степені n .

Оскільки одиниця розділити на експоненту менша за одиницю $1/e < 1$, то границя менша одиниці, отже абсолютноїй ряд збіжний.

Звідси слідує, що знакозмінний ряд абсолютно збіжний.

Приклад 8. Дослідити на абсолютно збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n}{(2n+1)^n}$$

Розв'язування: Бачимо, що ряд з модулів монотонно спадає

$1 > 9/25 > 81/343 > \dots$

Знайдемо границю на нескінченності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{(2n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{(2n)^n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n^n e^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Тут частину знаменника звели під другу чудову границю =e.

Для перевірки на абсолютнону збіжність застосуємо ознаку Даламбера

$$|a_n| = \frac{3^n}{(2n+1)^n}, |a_{n+1}| = \frac{3^{n+1}}{(2n+3)^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(2n+3)^{n+1}}}{\frac{3^n}{(2n+1)^n}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^n}{(2n+3)^n \cdot (2n+3)} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+3)} = 0$$

Аналогічний результат отримаємо за радикальною ознакою Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[n]{2n+1}} = 0$$

Абсолютний ряд збіжний, тому робимо висновок, що знакозмінний ряд абсолютно збіжний.

Домашнє завдання.

- Зробити конспект

Зворотній зв'язок

E-mail vitasergiiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забувати вказувати прізвище, групу і дату уроку.