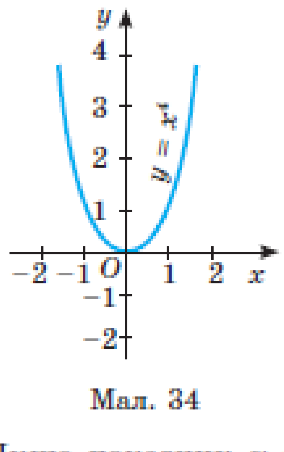
05.10.2022
Група 12
Математика (алгебра)
Урок 13-14
Тема: «Степенева функція. Властивості та графіки степеневої функції»
Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

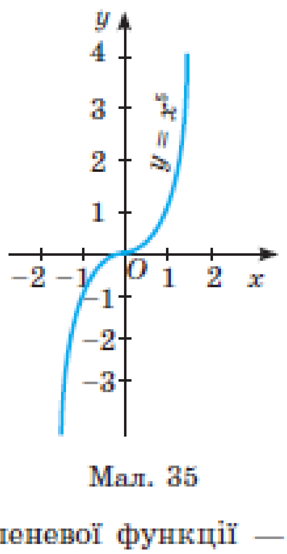
Матеріали до уроку:

> **!** Функцію, яку можна задати формулою $y = x^\alpha$, де x — аргумент, а α — дане число, називають степеневою.

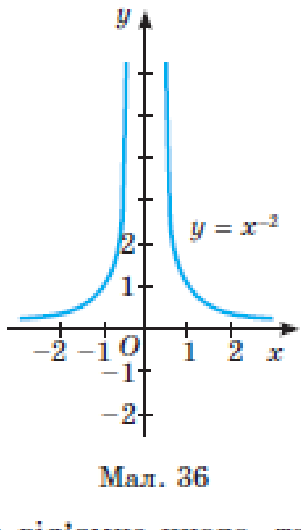
Уже відомі вам функції $y = x^2$ і $y = x^3$ (див. табл. 1, с. 11) — приклади степеневих функцій. Аналогічні властивості мають також усі інші степеневі функції з натуральними показниками a. На малюнках 34 і 35 подано графіки степеневих функцій $y = x^4$ і $y = x^5$. Кожна степенева функція з натуральним показником степеня визначена на множині всіх дійсних чисел R.



Мал. 34



Мал. 35

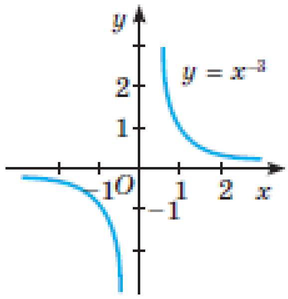


Мал. 36

Якщо показник α степеневої функції — ціле від'ємне число, то вона визначена на множині всіх дійсних значень аргументу x, за винятком $x = 0$. Наприклад, функція $y = x^{-1}$ — це вже відома вам обернена пропорційність $y = \dfrac{1}{x}$ (див. мал. 20).

На малюнках 36 і 37 зображено графіки функцій $y = x^{-2}$ і $y = x^{-3}$.

Якщо α — від'ємне парне число, то графік функції $y = x^{\alpha}$ симетричний відносно осі ординат, а якщо α — від'ємне непарне, то графік симетричний відносно початку координат. Узагалі, при кожному цілому показнику степеня α функція $y = x^{\alpha}$ парна, якщо число α парне, і непарна при непарному α.



Мал. 37

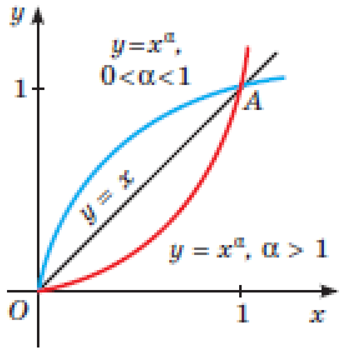
Якщо число α дробове і додатне, то степенева функція $y = x^{\alpha}$ зазвичай розглядається лише на множині невід'ємних значень аргументу. Такою, зокрема, є функція $y = x^{\frac{1}{2}}$, яку можна записати ще й так: $y = \sqrt{x}$ (див. графік у табл. 1, с. 11).

Зверніть увагу на те, який вигляд має графік степеневої функції з додатним показником степеня α на проміжку [0; 1]. На цьому проміжку графіком функції $y = x^{\alpha}$ (мал. 38) є:

- відрізок OA, якщо $\alpha = 1$;
- крива, направлена опуклістю вниз, якщо $\alpha > 1$;
- крива, направлена опуклістю вгору, якщо $0 < \alpha < 1$.

Чим більше додатне значення α ($\alpha > 1$), тим нижче від відрізка OA розміщується графік функції $y = x^{\alpha}$.

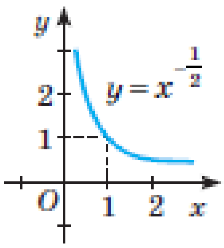
З малюнка 38 також добре видно, що степенева функція $y = x^{\alpha}$ з додатним показником степеня α на множині невід'ємних значень x є *зростаючою*.



Мал. 38

Якщо число α дробове і від'ємне, то степенева функція $y = x^{\alpha}$ розглядається лише на множині додатних значень аргументу. Наприклад, графік функції $y = x^{-\frac{1}{2}}$ зображено на малюнку 39. Зверніть увагу на те, що степенева функція $y = x^{\alpha}$ з від'ємним показником степеня α на множині додатних значень x є *спадною*.

Властивості степеневої функції використовують для розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей.



Мал. 39

175. Обчисліть значення функції $y = x^{\frac{2}{3}}$ у точках: 0, 1, 8, 1000.

$y = x^{\frac{2}{3}}$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 8$, $x_4 = 1000$.

$y_1 = 0^{\frac{2}{3}} = 0$; $y_2 = 1^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1^2} = 1$;

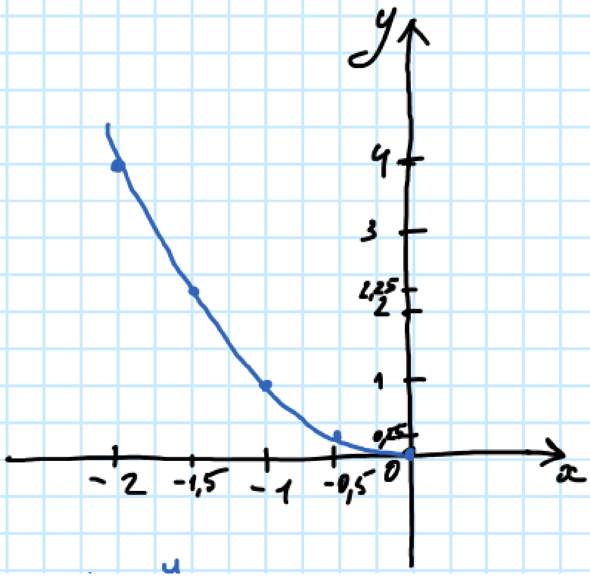
$y_3 = 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$; $y_4 = 1000^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1000^2} = 10^2 = 100$.

176. Побудуйте графік функції $y = x^2$ на проміжку:

а) [−3; 3]; б) [−2; 0]; в) [2; 3].

$y = x^2$) $[-2; 0]$

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0
y	4	$2,25$	1	$0,25$	0



180. Доведіть, що графік кожної степеневої функції $y = x^{2n}$ проходить через точки $A(1;\ 1)$ і $B(-1;\ 1)$.

$y = x^{2n}$, $A(\overset{x}{1}; \overset{y}{1})$, $B(\overset{x}{-1}; \overset{y}{1})$

Через т. A: $1 = 1^{2n}$

$1 = 1$ – проходить.

Через т. B: $1 = (-1)^{2n}$

$1 = 1$ – проходить.

182. Які з точок належать графіку функції: а) $y = x^2$; б) $y = \sqrt{x}$?

$A(0,1;\ 0,01)$; $B(0,16;\ -0,4)$; $C(-10;\ 100)$;

$D\left(-\frac{4}{9}; -\frac{2}{3}\right)$; $E\left(2\frac{7}{9}; 1\frac{2}{3}\right)$; $F\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{9}\right)$.

а) $y = x^2$

$A(0,1; 0,01)$: $0,01 = 0,1^2$

$0,01 = 0,01$ – належить.

$B(0,16; -0,4)$: $0,16 = (-0,4)^2$

$0,16 = 0,16$ – належить.

$C(-10; 100)$: $100 = (-10)^2$

$100 = 100$ – належить.

$D\left(-\frac{4}{9}; -\frac{2}{3}\right)$: $-\frac{2}{3} = \left(-\frac{4}{9}\right)^2$

$-\frac{2}{3} \neq \frac{16}{81}$ – не належить.

$E\left(2\frac{7}{9}; 1\frac{2}{3}\right)$: $1\frac{2}{3} = \left(2\frac{7}{9}\right)^2$

$\frac{5}{3} \neq \frac{625}{81}$ – не належить.

$F\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{9}\right)$: $-\frac{4}{9} = \left(-\frac{2}{3}\right)^2$

$-\frac{4}{9} \neq \frac{4}{9}$ – не належить.

б) $y = \sqrt{x}$

$A(0,1; 0,01)$: $0,01 \neq \sqrt{0,1}$ – не належить;

$B(0,16; -0,4)$: $-0,4 = \sqrt{0,16}$

$-0,4 \neq 0,4$ – не належить;

$C(-10; 100)$: $100 \neq \sqrt{-10}$ – не належить;

$D\left(-\frac{4}{9}; -\frac{2}{3}\right)$: $-\frac{2}{3} \neq \sqrt{-\frac{4}{9}}$ – не належить;

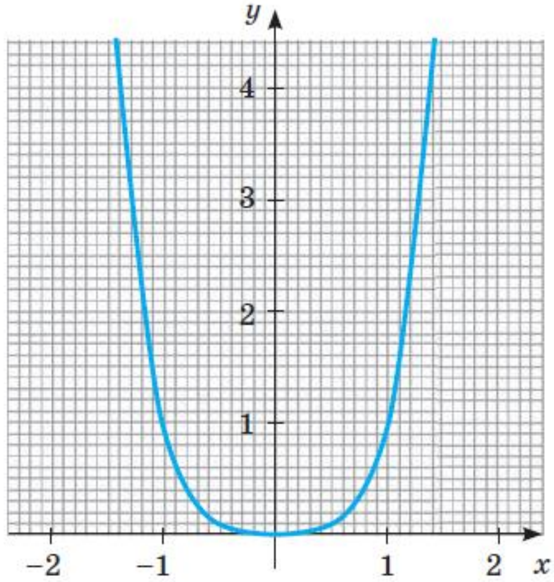
$E\left(2\frac{7}{9}; 1\frac{2}{3}\right)$: $1\frac{2}{3} = \sqrt{2\frac{7}{9}}$

$\frac{5}{3} = \sqrt{\frac{25}{9}}$

$\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$ – належить;

$F\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{9}\right)$: $-\frac{4}{9} \neq \sqrt{-\frac{2}{3}}$ – не належить.

185. За графіком функції $y = x^4$ (мал. 43) опишіть її властивості: яка область визначення цієї функції; на яких проміжках вона зростає; на яких спадає; при якому значенні x функція має найменше значення; чи має вона найбільше значення; чи є дана функція парною або непарною.



Мал. 43

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) Функція зростає: $[0; +\infty)$.

3) Функція спадає: $(-\infty; 0]$.

4) $y_{min} = 0$, $x = 0$.

5) y_{max} – немає, x – немає.

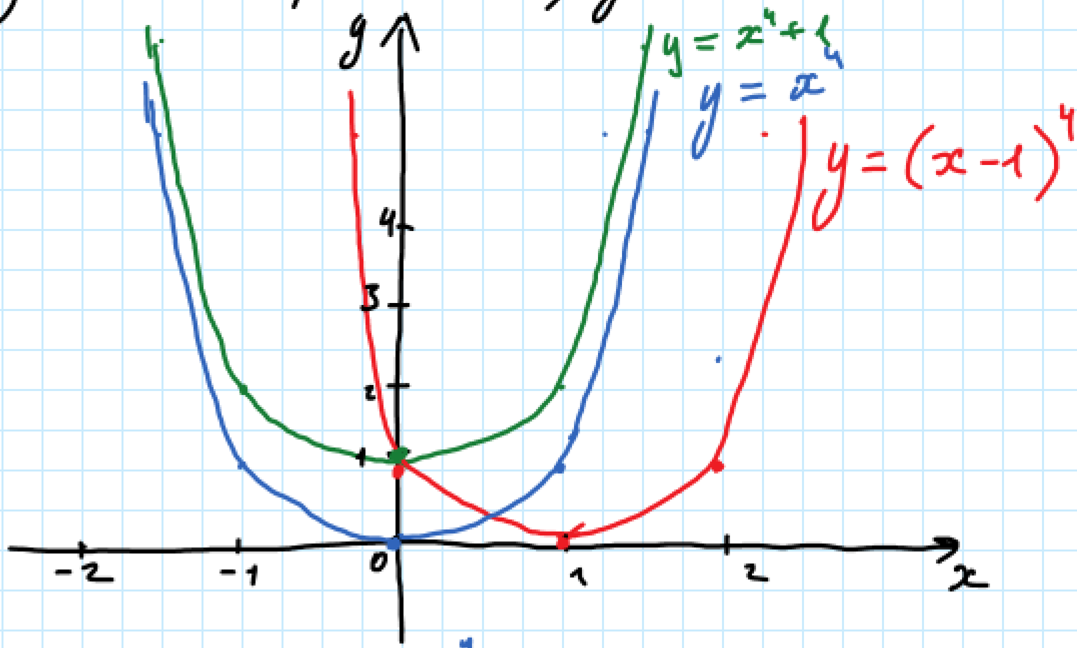
6) Парна функція.

187. Побудуйте графік функції:

а) $y = x^4 + 1$;   б) $y = x^5 - 1$;   в) $y = (x - 1)^4$;   г) $y = (x + 1)^5$.

188. Відомо, що графік функції $y = x^\alpha$ проходить через точку $P\left(2; \frac{1}{4}\right)$. Знайдіть значення α.

а) $y = x^4 + 1$; в) $y = (x-1)^4$.



$y = x^{\alpha}$, $P(2; \frac{1}{4})$

$\frac{1}{4} = 2^{\alpha}$ $\alpha = -2$. $y = x^{-2}$

197. Для поданих нижче функцій вкажіть нулі функції (якщо такі є) та проміжки зростання чи спадання:

а) $y = x^9$; б) $y = x^{20}$; в) $y = x^{\frac{13}{3}}$; г) $y = x^{-7}$; ґ) $y = x^{-24}$; д) $y = x^{-\frac{17}{4}}$.

№197 а) $y = x^9$

$x^9 = 0$

$x = 0$

$(0; 0)$ – нуль функції.

Функція зростає: $(-\infty; +\infty)$.

Спадання немає.

б) $y = x^{20}$

$x^{20} = 0$

$x = 0$

$(0; 0)$ – нуль функції.

Функція зростає: $[0; +\infty)$.

Функція спадає: $(-\infty; 0]$.

в) $y = x^{\frac{13}{3}}$

$y = \sqrt[3]{x^{13}}$

$x^{\frac{13}{3}} = 0$

$x = 0$

$(0; 0)$ – нуль функції.

Функція зростає: $(-\infty; +\infty)$.

Функція спадає: немає.

г) $y = x^{-7}$

$y = \frac{1}{x^7}$

$\frac{1}{x^7} = 0$

$\varnothing$

Немає нулів функції.

Функція зростає: немає.

Функція спадає: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням https://forms.gle/YAPY2bJLVEWdA2av7**.**

Зворотній зв'язок:
E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com