

07.10.2022

Група 11

Математика (алгебра)

Урок 9-10

Тема: «Корені n -го степеня. Властивості коренів. Дії над коренями»

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Пригадаємо, що таке квадратний корінь і його арифметичне значення.



Квадратним коренем із числа a називають число, квадрат якого дорівнює a .

називають арифметичним значенням квадратного кореня із числа a і позначають символом \sqrt{a} . Друге значення квадратного кореня із числа a дорівнює $-\sqrt{a}$. Квадратний корінь із числа 0 дорівнює 0. Квадратний корінь з від'ємного числа не існує.



Коренем n -го степеня із числа a називають число, n -й степінь якого дорівнює a .



Невід'ємний корінь n -го степеня з додатного числа a називають арифметичним значенням кореня n -го степеня із числа a . Його позначають символом $\sqrt[n]{a}$.

З додатного числа квадратних коренів існує два. Наприклад, числа 7 і -7 — квадратні корені із числа 49, оскільки $7^2 = 49$ і $(-7)^2 = 49$. Невід'ємне значення квадратного кореня із числа a

Квадратний корінь називають ще коренем другого степеня.

Подібно до коренів другого степеня існують також корені третього, четвертого, ..., n -го степенів.

Якщо показник кореня n — число непарне, то при кожному значенні a значення кореня n -го степеня з числа a існує, і його також позначають $\sqrt[n]{a}$. У виразі $\sqrt[n]{a}$:

a — підкореневий вираз, $\sqrt[n]{}$ — знак кореня, n — показник кореня.

Зверніть увагу! Символ $\sqrt[n]{a}$ використовують тільки для позначення арифметичного кореня та кореня непарного степеня з числа a .

Приклади:

- $\sqrt[3]{-64} = -4$, оскільки $(-4)^3 = -64$;
- $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3^4 = 81$;
- $\sqrt[5]{0,00001} = 0,1$, оскільки $0,1^5 = 0,00001$.

Для додатних підкореневих виразів і довільних показників коренів справджаються властивості, аналогічні властивостям квадратних коренів:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; & 4) \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \\ 2) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; & 5) \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k; \\ 3) \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; & 6) \sqrt[n]{a^{nk}} = a^k. \end{array}$$

Зверніть увагу! $\sqrt[n]{a^n} = a$, якщо $a \geq 0$; $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$; $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$.

Приклади:

$$a) \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{12 \cdot 18} = \sqrt[3]{4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 6;$$

$$b) \frac{5\sqrt[3]{16}}{6\sqrt[3]{250}} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{250}} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{3};$$

$$b) (2\sqrt[4]{9})^6 = 2^6 \cdot (\sqrt[4]{9})^6 = 64 \cdot (\sqrt{9})^3 = 64 \cdot 3^3 = 1728.$$

Щоб помножити корені з різними показниками, їх спочатку зводять до спільногого показника:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 3^3} = \sqrt[12]{432}.$$

Дії додавання і віднімання виконують з *подібними коренями* (у яких показники коренів і підкореневі вирази однакові).

Приклади:

$$a) 2\sqrt{17} + 3\sqrt{17} = 5\sqrt{17}; \quad b) a^5\sqrt{17} - 2a^5\sqrt{17} = -a^5\sqrt{17}.$$

Розглянемо ще деякі перетворення виразів з коренями (за умови, що $a \geq 0, b \geq 0$).

Внесення множника за знак кореня. У загальному вигляді це перетворення виконують у такий спосіб:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \sqrt[n]{b}.$$

Приклади:

$$a) \sqrt[4]{810} = \sqrt[4]{81 \cdot 10} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{10} = 3\sqrt[4]{10};$$

$$b) \sqrt[5]{64a^7b^{10}} = \sqrt[5]{32 \cdot a^5 \cdot (b^5)^2 \cdot 2a^2} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{(b^5)^2} \cdot \sqrt[5]{2a^2} = 2 \cdot a \cdot b^2 \cdot \sqrt[5]{2a^2} = 2ab^2 \cdot \sqrt[5]{2a^2}.$$

Внесення множника під знак кореня. Це перетворення, обернене до попереднього.

Приклади:

$$a) 5\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{500};$$

$$b) 2a^3b\sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[4]{(2a^3b)^4} \cdot \sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[4]{16a^{12} \cdot b^4 \cdot a \cdot b^3} = \sqrt[4]{16a^{13} \cdot b^7}.$$

Звільнення дробу від ірраціональності в знаменнику. У загальному вигляді (при $a > 0$, $m < n$) це перетворення виконують так:

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}} = \frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}.$$

Приклади:

а) $\frac{15}{\sqrt[4]{3}} = \frac{15 \cdot \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3}} = \frac{15 \cdot \sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{15 \cdot \sqrt[4]{3^3}}{3} = 5 \cdot \sqrt[4]{27};$

б) $\frac{b}{\sqrt[3]{2ab^2}} = \frac{b \cdot \sqrt[3]{2^2 \cdot a^2 b}}{\sqrt[3]{2ab^2} \cdot \sqrt[3]{2^2 a^2 b}} = \frac{b \cdot \sqrt[3]{4a^2 b}}{\sqrt[3]{2ab^2 \cdot 4a^2 b}} = \frac{b \sqrt[3]{4a^2 b}}{2ab} = \frac{\sqrt[3]{4a^2 b}}{2a}.$

Обчисліть (83–85).

83. а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[4]{0,0016}$; в) $\sqrt[5]{32}$; г) $\sqrt[3]{-125}$; д) $\sqrt[5]{32^{-5}}$; е) $\sqrt[3]{-0,008}$.

Розв'язання

а) $\sqrt[3]{27} = 3$; б) $\sqrt[4]{0,0016} = 0,2$; в) $\sqrt[5]{32} = 2$;

г) $\sqrt[3]{-125} = -5$; д) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-\frac{1}{32})^5} = -\frac{1}{32}$;

е) $\sqrt[3]{-0,008} = -0,2$.

85. а) $(\sqrt[3]{12})^3$; б) $\sqrt[6]{7^6}$; в) $\sqrt[8]{9^4}$; г) $(-\sqrt{13})^2$; д) $-\sqrt[4]{9^4}$; е) $\sqrt[4]{(-9)^4}$.

Розв'язання

а) $(\sqrt[3]{12})^3 = 12$; б) $\sqrt[6]{7^6} = 7$; в) $\sqrt[8]{9^4} = \sqrt{9^2} = 3$;

г) $(-\sqrt{13})^2 = 13$; д) $-\sqrt[4]{9^4} = -9$; е) $\sqrt[4]{(-9)^4} = |-9| = 9$.

88. Обчисліть значення виразу:

а) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[4]{7^5} : \sqrt[4]{7}$; в) $(\sqrt[6]{9})^3$.

Розв'язання

а) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$; б) $\sqrt[4]{7^5} : \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{7^4} = 7$;

в) $(\sqrt[6]{9})^3 = \sqrt{9} = 3$.

96. а) $\sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[4]{625}$; в) $\sqrt[4]{0,0081}$; г) $\sqrt[4]{0,00000016}$; д) $\sqrt[4]{2401}$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} \text{а)} \sqrt[4]{16} &= 2; & \text{б)} \sqrt[4]{625} &= 5; & \text{в)} \sqrt[4]{0,0081} &= 0,3; \\ \text{г)} \sqrt[4]{0,00000016} &= 0,02; & \text{д)} \sqrt[4]{2401} &= 7. \end{aligned}$$

Спростіть вираз (98–101).

98. а) $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$; б) $(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)$; в) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$; г) $(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} \text{а)} (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) &= 1^2 - (\sqrt{2})^2 = 1-2 = -1; \\ \text{б)} (\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2) &= (\sqrt{3})^2 - 2^2 = 3-4 = -1; \\ \text{в)} (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}; \\ \text{г)} (\sqrt{5}-\sqrt{7})^2 &= (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 5 - 2\sqrt{35} + 7 = \\ &= 12 - 2\sqrt{35}. \end{aligned}$$

100. а) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$; в) $\sqrt{2\sqrt[3]{5}}$; г) $\sqrt[3]{3\sqrt{2}}$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} \text{а)} \sqrt[3]{\sqrt{5}} &= \sqrt[3]{5}; & \text{б)} \sqrt[3]{\sqrt[3]{7}} &= \sqrt[3]{7}; & \text{в)} \sqrt{2\sqrt[3]{5}} &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \\ &= \sqrt[3]{40}; \\ \text{г)} \sqrt[3]{3\sqrt{2}} &= \sqrt[3]{\sqrt{3^2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{9 \cdot 2} = \sqrt[3]{18}. \end{aligned}$$

Винесіть множник з-під знака кореня (тут і далі $a \geq 0, b \geq 0$) (103, 104).

103. а) $\sqrt[3]{3000}$; б) $\sqrt[4]{48}$; в) $\sqrt[5]{486}$; г) $\sqrt[4]{324}$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} \text{а)} \sqrt[3]{3000} &= \sqrt[3]{1000 \cdot 3} = \sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt[3]{3} = 10\sqrt[3]{3}; \\ \text{б)} \sqrt[4]{48} &= \sqrt[4]{16 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}; \\ \text{в)} \sqrt[5]{486} &= \sqrt[5]{243 \cdot 2} = 3\sqrt[5]{2}; \\ \text{г)} \sqrt[4]{324} &= \sqrt[4]{81 \cdot 4} = 3\sqrt[4]{4}. \end{aligned}$$

Внесіть множник під знак кореня (105, 106).

105. а) $3\sqrt[3]{3}$; б) $2\sqrt[4]{3}$; в) $2\sqrt[6]{0,25}$; г) $a\sqrt[5]{2}$.

Розв'язання

- $3\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{81}$;
- $2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{48}$;
- $2\sqrt[6]{0,25} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 0,25} = \sqrt[6]{16}$;
- $a\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{a^5 \cdot 2} = \sqrt[5]{2a^5}$.

108. а) $\frac{2}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{4}{\sqrt[4]{8}}$; г) $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$.

Розв'язання

- $\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{6}}{\cancel{6}^3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$;
- $\frac{4}{\sqrt[4]{8}} = \frac{4\sqrt[4]{8}}{(\sqrt[4]{8})^4} = \frac{\cancel{4}\sqrt[4]{8}}{\cancel{8}^2} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$;
- $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\cancel{6}\sqrt{3}}{\cancel{3}^1} = 2\sqrt{3}$;
- $\frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{3\sqrt[3]{9}}{(\sqrt[3]{9})^3} = \frac{\cancel{3}\sqrt[3]{9}}{\cancel{9}^3} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$.

110. а) $x^3 = -1$; б) $x^3 = -64000$; в) $x^4 = 256$; г) $x^5 = 32$; і) $x^4 = 0,0625$.

Розв'язання

- $x^3 = -1$
 $x = \sqrt[3]{-1}$
 $x = -1$;
- $x^3 = -64000$
 $x = \sqrt[3]{-64000}$
 $x = -40$;
- $x^4 = 256$
 $x = \sqrt[4]{256}$
 $x = 4$;
- $x^5 = 32$
 $x = \sqrt[5]{32}$
 $x = 2$;
- $x^4 = 0,0625$
 $x = \sqrt[4]{0,0625}$
 $x = 0,5$.

Обчисліть значення виразу (112–115).

112. а) $\sqrt{9} + \sqrt{4} - \sqrt[6]{64}$; б) $\sqrt{36} + \sqrt[4]{16}$; в) $12 - 6\sqrt[3]{0,125}$; г) $1 + 10\sqrt[4]{0,0081}$.

Роб'язання

$$a) \sqrt{9} + \sqrt{4} - \sqrt[6]{64} = 3 + 2 - 2 = 3;$$

$$\delta) \sqrt{36} + \sqrt[4]{16} = 6 + 2 = 8;$$

$$\theta) 12 - 6\sqrt[3]{0,125} = 12 - 6 \cdot 0,5 = 12 - 3 = 9;$$

$$z) 1 + 10\sqrt[3]{0,0081} = 1 + 10 \cdot 0,3 = 1 + 3 = 4.$$

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу (119–122).

$$122. \text{ a)} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-5}; \quad \text{б)} \frac{7}{\sqrt{7}-7}; \quad \text{в)} \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}.$$

Розв'яжіть рівняння (123, 124).

$$123. \text{ а)} x^2 = 11; \quad \text{б)} x^4 = 16; \quad \text{в)} x^8 = 25; \quad \text{г)} x^9 = -27.$$

$$124. \text{ а)} \sqrt{x} = 0; \quad \text{б)} \sqrt{x} = 1; \quad \text{в)} \sqrt[3]{x} = 2; \quad \text{г)} \sqrt{x} = -3.$$

Роб'язання

$$a) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-5} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+5)}{(\sqrt{3}-5)(\sqrt{3}+5)} = \frac{3+5\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 - 5^2} = \frac{3+5\sqrt{3}}{3-25} = \frac{3+5\sqrt{3}}{-22}.$$

$$\delta) \frac{7}{\sqrt{7}-7} = \frac{7(\sqrt{7}+7)}{(\sqrt{7})^2 - 7^2} = \frac{7\sqrt{7}+7}{7-49} = \frac{7\sqrt{7}+7}{-42} = \frac{\cancel{7}\sqrt{7}+\cancel{7}}{\cancel{7}\cancel{6}} = \frac{\sqrt{7}+7}{6};$$

$$\theta) \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{6\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} =$$

$$= \frac{\cancel{3}\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\cancel{2}\cancel{1}} = 3\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{3}).$$

Роб'язання

$$a) x^2 = 11 \quad \text{б)} x^4 = 16 \quad \text{в)} x^8 = 25 \quad \text{г)} x^9 = -27$$

$$x = \sqrt{11}; \quad x = \sqrt[4]{16} \quad x = \sqrt[8]{25}; \quad x = \sqrt[9]{-27}.$$

$$x = 2;$$

Роб'язання

$$a) \sqrt{x} = 0 \quad \text{б)} \sqrt{x} = 1 \quad \text{в)} \sqrt[3]{x} = 2 \quad \text{г)} \sqrt{x} = -3$$

$$x = 0; \quad x = 1; \quad x = 8; \quad x = \emptyset.$$

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням
<https://forms.gle/Ao6v1vf6Lg7UATXY7>.

Зворотній зв'язок:
E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com