11.10.2022

Група 32

Математика (алгебра)

Урок 17-18

Тема уроку: Розв'язування логарифмічних рівнянь та нерівностей.

Мета уроку: Систематизувати та узагальнити відомості, уміння і навички про логарифми, логарифмічні рівняння і нерівності, методи та способи їх розв'язування, розвивати логічне мислення, навички колективної та самостійної роботи, уміння розраховувати свої сили і оцінювати свої можливості, спонукати до взаємоконтролю; виховувати культуру математичної мови, самостійність, контролювати увагу на всіх етапах уроку.

Матеріали до уроку
Розв’язання типових вправ

№ 21.16 (1)

$\log_{\sqrt{3}}(2^x - 3) + \log_{\sqrt{3}}(2^x - 1) = 2$

$\log_{\sqrt{3}}(2^x - 3)(2^x - 1) = \log_{\sqrt{3}} 3$

ОДЗ: $\begin{cases} (2^x - 3) > 0 \\ 2^x - 1 > 0 \end{cases}$ $\quad 2^x > 3$

$(2^x - 3)(2^x - 1) = 3$

$2^{2x} - 2^x - 3 * 2^x + 3 - 3 = 0$

$2^{2x} - 4 * 2^x = 0$

$2^x(2^x - 4) = 0$

$\left[\begin{array}{l} 2^x = 0 \\ 2^x = 4,\ 2^x = 2^2,\ x=2 \end{array}\right.$

Відповідь: 2

№ 21.20 (1)

$\frac{2\log_2 x}{\log_2(3-2x)} = 1 \qquad \frac{\log_2 x^2}{\log_2(3-2x)} = 1$

$\begin{cases} \log_2 x^2 = \log_2(3 - 2x) \\ x > 0 \\ 3\text{-}2x > 0 \\ \log_2(3 - 2x) \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ 0 < x < \frac{3}{2} \\ 3 - 2x \neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right. \\ 0 < x < \frac{3}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$

Відповідь: коренів немає.

№ 22.22 (1)

$$\log_{\frac{7}{4}} \log_5(x^2 - 2x - 3) \le 0$$

$$\log_{\frac{7}{4}} \log_5(x^2 - 2x - 3) \le \log_{\frac{7}{4}} 1$$

$$\begin{cases} \log_5(x^2 - 2x - 3) \le 1 \\ \log_5(x^2 - 2x - 3) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log_5(x^2 - 2x - 3) \le \log_5 5 \\ \log_5(x^2 - 2x - 3) > \log_5 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \le 5 \\ x^2 - 2x - 3 > 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x - 8 \le 0 \\ x^2 - 2x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \le x \le 4 \\ \left[\begin{array}{l} x < 1 - \sqrt{5} \\ x > 1 + \sqrt{5} \end{array}\right. \end{cases}$$

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $log_5^2\ x - log_5 x > 2$.

Розв'язання

Нехай $log_5 x = y$, тоді отримаємо нерівність $y^2 - y - 2 > 0$.

Розв'яжемо отриману нерівність методом інтервалів (рис. 171): $y \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

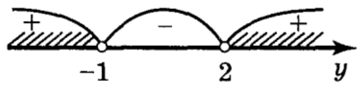


Рис. 171

Враховуючи заміну матимемо:

1) $log_5 x < -1$; $log_5 x < log_5 \frac{1}{5}$; $\begin{cases} x < \frac{1}{5}, \\ x > 0; \end{cases}$ $x \in \left(0; \frac{1}{5}\right)$;

2) $log_5 x > 2$; $log_5 x > log_5 25$; $\begin{cases} x > 25, \\ x > 0; \end{cases}$ $x \in (25; +\infty)$. Отже, $\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup (25; +\infty)$ – розв'язок даної нерівності.

Відповідь: $\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup (25; +\infty)$.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $\frac{2}{1 + \lg x} \ge 1$.

Розв'язання

Нехай $lg\ x = y$, тоді матимемо нерівність

$\frac{2}{1+y} \ge 1$; $y \ne 1$; $\frac{2}{1+y} - 1 \ge 0$; $\frac{2-1-y}{1+y} \ge 0$; $\frac{1-y}{1+y} \ge 0$.

Розв'яжемо отриману нерівність методом інтервалів (рис. 172): $y \in (-1; 1]$.

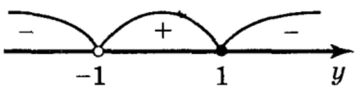


Рис. 172

Враховуючи заміну, отримаємо $-1 < lg\, x \le 1$.

Рис. 173

Тоді $\begin{cases} \lg x \le 1, \\ \lg x > -1; \end{cases}$ $\begin{cases} \lg x \le \lg 10, \\ \lg x > \lg 0{,}1; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 10, \\ x > 0{,}1 \\ x > 0; \end{cases}$ отже, $x \in (0{,}1;\ 10]$ (рис. 173).

Відповідь: (0,1; 10].

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $(3x - 6)log_{0,5}\, x > 0$.

Розв'язання

Нехай $y = (3x - 6)\ log_{0,5}\, x$, $y > 0$.

Область визначення функції y: $x > 0$.

Рис. 174

Знайдемо нулі функції: $(3x - 6) \cdot log_{0,5}\, x = 0$;

$3x - 6 = 0$, $log_{0,5}\, x = 0$;

$x = 2$, $x = 1$.

Розіб'ємо область визначення функції на проміжки точками 2 і 1 і знайдемо знаки функції на утворених проміжках (рис. 174). Отже, $x \in (1;\ 2)$.

Відповідь: (1; 2).

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $log_{\,x\text{-}3}(x - 1) < 2$.

Розв'язання

Нехай у = $log_{\,x\text{-}3}(x - 1) - 2$ і $y < 0$. Область визначення функції знаходимо із системи: $\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x - 3 > 0, \\ x - 3 \ne 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ x > 3, \\ x \ne 4; \end{cases}$ $x \in (3;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

Знайдемо нулі функції: $log_{\,x\text{-}3}(x - 1) = 2$; $x - 1 = (x - 3)^2$; $x - 1 = x^2 - 6x + 9$; $x^2 - 7x + 10 = 0$; $x = 5$, $x = 2$. $x = 2$ — не входить в область визначення функції. Перевіркою переконуємося, що $x = 5$ — нуль функції.

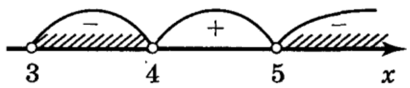


Рис. 175

Розіб'ємо область визначення функції на проміжки точкою 5 та знайдемо знаки функції на утворених проміжках (рис. 175).

Отже, $x \in (3;\ 4) \cup (5;\ +\infty)$.

Відповідь: $(3;\ 4) \cup (5;\ +\infty)$.

Приклад 5. Розв'яжіть нерівність $log_3\, x \le 4 - x$ графічно.

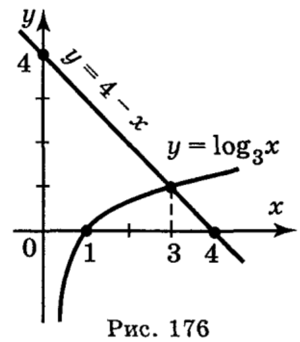


Рис. 176

Розв'язання

Побудуємо графіки функцій $y = log_3\, x$ і $y = 4 - x$ в одній системі координат. Графіки перетинаються в точці А з абсцисою $x = 3$ (рис. 176).

Із рисунка видно, що множина розв'язків нерівності $log_3\, x < 4 - x$ є проміжок (0; 3].

Відповідь: (0; 3].

Переглянемо відео ролик «З історії розвитку логарифмів» https://www.youtube.com/watch?v=p90byJircpM

Домашнє завдання.

Виконати завдання

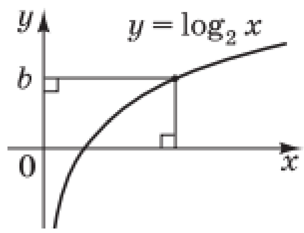
1. ЗНО- 2017

Укажіть проміжок, якому належить число $\log_2 9$.

А	Б	В	Г	Д
(0; 1)	(1; 2)	(2; 3)	(3; 4)	(4; 5)

2. Розв'яжіть нерівність $\log_2 x < b$, використавши рисунок.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 2^b)$	$(0; b)$	$(-\infty; 2^b)$	$(\log_2 b; +\infty)$	$(-\infty; b)$



3. Знайти корені рівняння: $\log_3(2x-1) = \log_3(x^2-1)$
4. Розв'язати нерівність: $\log_{0,2}(x-2) > \log_{0,2}(9-x)$
5. Розв'язати рівняння: $\log_2(x-4) + \log_2(2x-1) = 2\log_2 3$. Якщо рівняння має кілька коренів, записати у відповідь їх добуток.

Зворотній зв'язок:
E-mail: **vitasergiivna1992@gmail.com**