14.10.2022
Група 11
Математика (алгебра)
Урок 11-12
Тема: «Степені з раціональними показниками»
Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

!

1. Степенем числа a з натуральним показником $n > 1$ називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a, тобто

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}.$$

2. Степенем числа a з показником 1 називають число a: $a^1 = a$.
3. Будь-яке відмінне від нуля число в степені 0 дорівнює 1, тобто якщо $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.
4. Якщо n — довільне натуральне число, а $a \neq 0$, то

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Виявляється, можна розглядати степені також із дробовими показниками.

!

Степенем показника $\frac{m}{n}$ з додатного числа a називають корінь n-го степеня із числа a^m, тобто

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Для степенів додатних чисел a, b з дробовими (раціональними) показниками r і s справджуються такі властивості, як і для степенів із цілими показниками:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; 2) $a^r : a^s = a^{r-s}$;

3) $(a^r)^s = a^{rs}$; 4) $(ab)^r = a^r b^r$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Із цих властивостей випливає, що *вирази з дробовими показниками степенів і додатними основами можна перетворювати, як і вирази із цілими показниками*. Наприклад,

$$a^{\frac{1}{2}} + a = a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left(1 + a^{\frac{1}{2}}\right); \quad \left(x^{\frac{3}{2}} - c\right)\left(x^{\frac{3}{2}} + c\right) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 - c^2 = x^3 - c^2.$$

Таке трактування степеня з дробовим показником відповідає введеному раніше поняттю степеня із цілим показником. Тому їх можна об'єднати і говорити *про степені з раціональними показниками*.

130. а) $16^{\frac{1}{4}}$; б) $27^{\frac{1}{3}}$; в) $625^{\frac{1}{4}}$; г) $25^{\frac{1}{2}}$.

131. а) $5\cdot16^{\frac{1}{4}}$; б) $3\cdot8^{\frac{2}{3}}$; в) $-2\cdot27^{\frac{1}{3}}$; г) $2^{-2}\cdot64^{\frac{1}{2}}$.

30 вересня 2022 р. 0:47

№130. а) $16^{\frac14}=\sqrt[4]{16}=2$; б) $27^{\frac13}=\sqrt[3]{27}=3$; в) $625^{\frac14}=\sqrt[4]{625}=5$;
г) $25^{\frac12}=\sqrt{25}=5$.

№131 а) $5\cdot16^{\frac14}=5\cdot\sqrt[4]{16}=5\cdot2=10$;
б) $3\cdot8^{\frac23}=3\cdot\sqrt[3]{8^2}=3\cdot\sqrt[3]{64}=3\cdot4=12$;
в) $-2\cdot27^{\frac13}=-2\cdot\sqrt[3]{27}=-2\cdot3=-6$;
г) $2^{-2}\cdot64^{\frac12}=\frac12\cdot\sqrt{64}=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{8}=4$.

137. а) $8^{\frac{2}{3}}\cdot7^0$ (1); б) $81^{-\frac{3}{4}}\cdot3^4$ (2); в) $49^{\frac{3}{2}}\cdot49^0$ (3); г) $0,25^{-\frac{1}{2}}\cdot3,5$ (4).

а) $8^{\frac23}\cdot7^0=\sqrt[3]{8^2}\cdot1=\sqrt[3]{64}\cdot1=4$;
б) $81^{-\frac34}\cdot3^4=\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac34}\cdot3^4=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{81}\right)^3}\cdot81=\left(\frac13\right)^3\cdot81=\frac{1}{\cancel{27}}\cdot\cancel{81}=3$;
в) $49^{\frac32}\cdot49^0=\sqrt{49^3}\cdot1=7^3\cdot1=343$;
г) $0,25^{-\frac12}\cdot3,5=\left(\frac{25}{100}\right)^{-\frac12}\cdot\frac{35}{10}=\left(\frac{100}{25}\right)^{\frac12}\cdot\frac{35}{10}=\sqrt{\frac{100}{25}}\cdot\frac{35}{10}=\frac{\cancel{10}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{35}}{\cancel{10}}=7$;

Обчисліть, не користуючись калькулятором (142–144).

142. а) $2^{-3}-0,5^3$; б) $8\cdot2^{-4}$; в) $1,2^0-2^{-4}\cdot8$.

а) $2^{-3}-0,5^3=\left(\frac12\right)^3-0,125^3=0,125-0,125=0$;
б) $8\cdot2^{-4}=\cancel{8}\cdot\frac{1}{\cancel{16}}=\frac12$;
в) $1,2^0-2^{-4}\cdot8=1-\left(\frac12\right)^4\cdot8=1-\frac{1}{\cancel{16}}\cdot\cancel{8}=1-\frac12=\frac12$.

147. а) $(1-c):(1-c^{0,5})$; б) $c^2x^{-0,5}(c^{-1}x^{0,5}+c^{-2}x^{0,5})$.

148. Яке із чисел більше:

а) $\left(64^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$ чи $\left(0,64^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$; б) $\left(32^{\frac{4}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}}$ чи $\left(\sqrt{2}\right)^{-2}$?

№147 а) $(1-c):(1-c^{0,5})=\frac{1-c}{1-c^{0,5}}=\frac{\cancel{(1-c^{0,5})}(1+c^{0,5})}{\cancel{1-c^{0,5}}}=1+c^{0,5};$

б) $c^2x^{-0,5}(c^{-1}x^{0,5}+c^{-2}x^{0,5})=c^{2+(-1)}\cdot x^{-0,5+0,5}+c^{2+(-2)}\cdot x^{-0,5+0,5}=$

$=c^1x^0+c^0\cdot x^0=c\cdot 1+1\cdot 1=c.$

№148 а) $(64^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{4}}=64^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{64}}=\frac{1}{8};$

$(0,64^{\frac{3}{4}})^{-\frac{2}{3}}=0,64^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{64}{100}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{100}{64}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{100}{64}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}.$

$(64^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{4}}<(0,64^{\frac{3}{4}})^{-\frac{2}{3}}$

б) $(32^{\frac{4}{5}})^{-\frac{1}{4}}=(\sqrt{2})^{-2}$

$(32^{\frac{4}{5}})^{-\frac{1}{4}}=32^{-\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=\frac{1}{2};\qquad (\sqrt{2})^{-2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$

151. Запишіть без знаків кореня вираз:

а) $\sqrt[7]{x}$; б) $\sqrt[5]{(a-2)}$; в) $a^2\sqrt{x-a}$; г) $\sqrt[4]{3a^2+c^2}$; ґ) $3:\sqrt[5]{x+2}$; д) $\sqrt[4]{x+\sqrt{x}}$.

а) $\sqrt[7]{x}=x^{\frac{1}{7}};$ б) $\sqrt[5]{(a-2)}=(a-2)^{\frac{1}{5}};$ в) $a^2\sqrt{(x-a)}=a^2\cdot(x-a)^{\frac{1}{2}};$

г) $\sqrt[4]{3a^2+c^2}=(3a^2+c^2)^{\frac{1}{4}};$ ґ) $3:\sqrt[5]{x+2}=3:(x+2)^{\frac{1}{5}}=\frac{3}{(x+2)^{\frac{1}{5}}};$

д) $\sqrt[4]{x+\sqrt{x}}=\sqrt[4]{(x+x^{\frac{1}{2}})}=(x+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}.$

Обчисліть (155–158).

155. а) $10^{\frac{2}{8}}\cdot 10^{-\frac{1}{2}}\cdot 10^{0,1}$; в) $3\cdot 9^{0,4}\cdot\sqrt[5]{3}$; ґ) $\left(\sqrt[3]{24}\cdot\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $4^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{1\frac{2}{3}}\cdot 8^{-\frac{1}{9}}$; г) $8^{-\frac{1}{3}}\cdot 16^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}$; д) $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(64^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

б) $4^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{1\frac{2}{3}}\cdot 8^{-\frac{1}{9}}=(2^2)^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{3}}\cdot(2^3)^{-\frac{1}{9}}=2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{3}{9}}=$

$=2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{16}.$

в) $3\cdot 9^{0,4}\cdot\sqrt[5]{3}=3\cdot(3^2)^{0,4}\cdot 3^{\frac{1}{5}}=3\cdot 3^{0,8}\cdot 3^{\frac{1}{5}}=$

$=3^1\cdot 3^{\frac{4}{5}}\cdot 3^{\frac{1}{5}}=3^{1+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}}=3^{\frac{10}{5}}=3^2=9;$

г) $8^{-\frac{1}{3}}\cdot 16^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}=(2^3)^{-\frac{1}{3}}\cdot(2^4)^{\frac{1}{3}}\cdot(2^2)^{\frac{1}{3}}=2^{-1}\cdot 2^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}=2^{-1+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}=2^{\frac{3}{3}}=2^1=2;$

г) $\left(\sqrt[3]{24}\cdot\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\sqrt[3]{24}\cdot\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} =$

$= \left(\sqrt[3]{\underset{8}{\cancel{24}}\cdot\frac{8}{\underset{1}{\cancel{3}}}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left((64)^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 64^{-\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2;$

д) $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(64^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4^{\frac{1}{3}}}{9^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 64^{-\frac{1}{6}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{6}}\cdot\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{6}} =$

$= \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{3}.$

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням https://forms.gle/cfRHWEXVrf8F2wqU8.

Зворотній зв'язок:
E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com