

24.10.2022

Група 12

Математика (алгебра)

Урок 22-23

Тема: Тригонометричні функції числового аргументу. Основні тригонометричні формули

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Досі для вимірювання кутів ви використовували градуси або частини градуса — мінuty та секунди.

У багатьох випадках зручно користуватися іншою одиницею виміру кутів. Її називають радіаном.

Означення. Кутом в один радіан називають центральний кут кола, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.

На рисунку 8.1 зображено центральний кут AOB , що спирається на дугу AB , довжина якої дорівнює радіусу кола. Величина кута AOB дорівнює одному радіану. Записують: $\angle AOB = 1 \text{ рад}$. Також говорять, що радіанна міра дуги AB дорівнює одному радіану. Записують: $\cup AB = 1 \text{ рад}$.

Радіанна міра кута (дуги) не залежить від радіуса кола. Це твердження проілюстровано на рисунку 8.2.

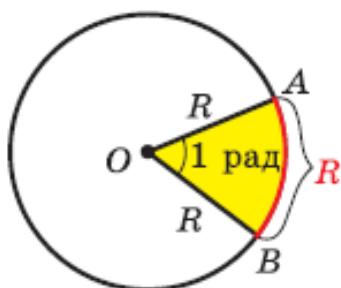


Рис. 8.1

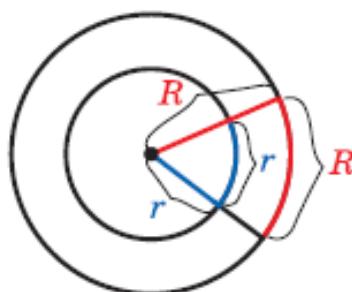


Рис. 8.2

Довжина півколо дорівнює πR . Отже, радіанна міра півколо дорівнює π рад. Градусна міра півколо становить 180° . Сказане дає змогу встановити зв'язок між радіанною та градусною мірами, а саме:

$$\pi \text{ рад} = 180^\circ. \quad (1)$$

Звідси

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ$$

Поділивши 180 на $3,14$ (нагадаємо, що $\pi \approx 3,14$), можна встановити: $1 \text{ рад} \approx 57^\circ$.

Якщо обидві частини рівності (1) поділити на 180 , то отримаємо:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \quad (2)$$

Точні значення тригонометричних функцій при деяких значеннях аргументу ($0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ і т. п.) можна визначати, користуючись одиничним колом. Вони наведені в таблиці 3 (с. 62).

Функції $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ називають тригонометричними функціями числового аргументу.

Таблиця 3

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	не існує

Вважають, що синус, косинус, тангенс, котангенс числа α дорівнюють відповідно синусу, косинусу, тангенсу, котангенсу кута α радіанів.

Отже, кожне твердження про тригонометричні функції числа α рівносильно твердженю про тригонометричні функції кута α радіанів і навпаки. Зокрема, правильні формули

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Якщо x і y — абсциса й ордината якої-небудь точки одиничного кола, то $x^2 + y^2 = 1$ (мал. 60), $\cos \alpha$ і $\sin \alpha$ — абсциса й ордината деякої точки одиничного кола (див. мал. 58). Тому, яке не було б дійсне число α , завжди $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. Це — основна тригонометрична тотожність. Приєднавши до неї ще формули, які випливають з означення тангенса і котангенса, дістанемо такі тотожності (за умови, що $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ — існують):

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad (1)$$

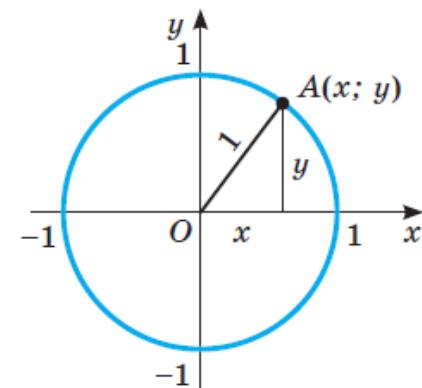
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad (2)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; \quad (4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad (5)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (6)$$



Мал. 60

8.1.° Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює:

- 1) 25° ; 2) 40° ; 3) 100° ; 4) 160° ; 5) 210° ; 6) 300° .

8.2.° Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

- 1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $1,2\pi$; 5) 3π ; 6) $2,5\pi$.

$$\begin{aligned} 1) 25^\circ &= 25 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = \frac{5\pi}{36} \text{ rad}; \quad 2) 40^\circ = 40 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = \frac{2\pi}{9} \text{ rad}; \\ 3) 100^\circ &= 100 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{9} \text{ rad}; \quad 4) 160^\circ = 160 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{8\pi}{9}; \\ 5) 210^\circ &= 210 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{6}; \quad 6) 300^\circ = 300 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{v8.2. } 1) \frac{\pi}{10} &= \frac{\pi}{10} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 18^{\circ}; \quad 2) \frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 30^{\circ}; \\ 3) \frac{\pi}{9} &= \frac{\pi}{9} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 20^{\circ}; \quad 4) 1,2\pi = 1,2\pi \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = \frac{12\pi}{10} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 216^{\circ}; \\ 5) 3\pi &= 3\pi \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 540^{\circ}; \quad 6) 2,5\pi = \frac{2,5\pi}{10} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 450^{\circ}. \end{aligned}$$

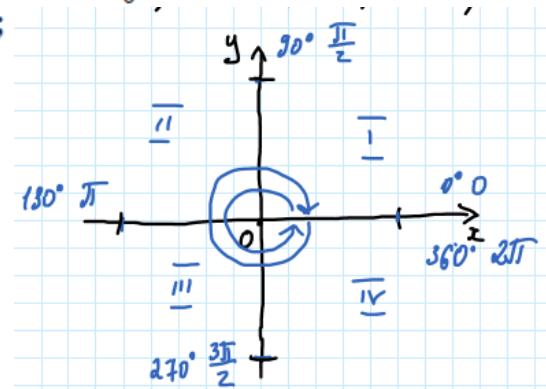
8.8.° У якій координатній чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

- 1) 127° ; 4) 400° ; 7) -470° ;

- C) 600 D) 6000 E) $\frac{\pi}{2}$

- 2) 89° ; 5) 600° ; 8) $\frac{1}{5}$;

- $$3) 276^\circ; \quad 6) -400^\circ; \quad 9) -\frac{7\pi}{6}$$



- 1) 127° — II кв.; 4) 400° — I кв.; 7) -470° — III кв.;
 2) 89° — I кв.; 5) 600° — III кв.; 8) $\frac{\pi}{5} = 36^\circ$ — I кв.;
 3) 276° — IV кв.; 6) -400° — IV кв.; 9) $-\frac{7\pi}{6} = -210^\circ$ — II кв.;

9.1.° Обчисліть значення виразу:

$$\begin{array}{ll} 1) 2 \cos 0^\circ + 3 \sin 90^\circ; & 3) \sin 0^\circ + \operatorname{tg} \pi - \sin \frac{3\pi}{2}; \\ 2) \sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ; & 4) 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{6}. \end{array}$$

9.2.° Чому дорівнює значення виразу:

$$\begin{array}{ll} 1) \cos 60^\circ + \sin 30^\circ; & 3) \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}; \\ 2) 7 \operatorname{tg}^2 45^\circ - 3 \sin 45^\circ; & 4) \cos \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2}? \end{array}$$

✓9.1. 3) $\sin 0^\circ + \operatorname{tg} \pi - \sin \frac{3\pi}{2} = 0 + 0 - (-1) = 1;$
 4) $2 \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$
 $= 2 \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2}{2} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1,75$

✓9.2. 3) $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$
 4) $\cos \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - (-1) = 1.$

9.3.° Чи є можливою рівність:

1) $\cos \alpha = \frac{\pi}{3};$

1) $\cos \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} \approx \frac{3,14}{3} > 1$, а $\cos \alpha \in [-1; 1]$,
 тому $\cos \alpha = \frac{\pi}{3}$ не існує.

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням

<https://forms.gle/GfFRj6PVMZv2iAce8>.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com