

**28.10.2022**

**Група 25**

**Математика (геометрія)**

**Урок 3-4**

**Тема:** Вимірювання кутів у просторі

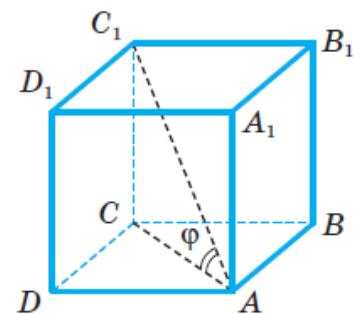
**Мета:**

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

**Матеріали до уроку:**

**Кут між прямою і площинами. Що розуміють під кутом між прямою і площинами?**

Якщо пряма паралельна площині, то вважають, що кут між такою прямую і площею дорівнює  $0^\circ$ . Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між ними дорівнює  $90^\circ$ . У решті випадків кутом між прямою і площею називають кут між прямую та її ортогональною проекцією на площину.



Мал. 314

До кута між прямую і площею близьке поняття кута між похилою і площею.



**Кутом між похилою і площею називають кут між похилою та її проекцією на площину.**

Йдеється про прямокутну (ортогональну) проекцію. Якщо  $\phi$  — кут між прямую і площею, то  $0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ ; якщо  $\phi$  — кут між похилою і площею, то  $0^\circ < \phi < 90^\circ$ .

Можна довести, що кут між похилою і площею найменший з усіх кутів, які

похила утворює з прямими, проведеними на площині через основу похилої.

**Кут між площинами.** Ви вже знаєте з п. 30, як знайти кут між площинами. Якщо дві площини паралельні, то вважають, що кут між ними

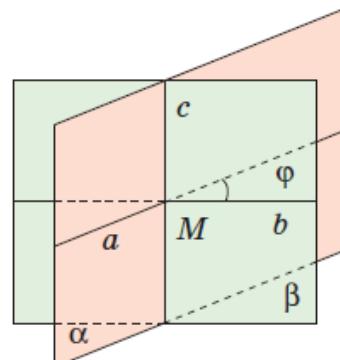
дорівнює  $0^\circ$ . Якщо площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $c$ , то, щоб визначити кут між цими площинами, у кожній з них через довільну точку  $M$  прямої  $c$  можна провести прямі  $a$  і  $b$ , перпендикулярні до прямої  $c$  (мал. 318).

Кут між прямими  $a$  і  $b$  приймають за кут між даними площинами  $\alpha$  і  $\beta$ . Можна довести, що міра цього кута  $\phi$  не залежить від вибору точки  $O$  на прямій  $c$ . Кут між двома площинами, як і між двома прямими, знаходиться в межах від  $0^\circ$  до  $90^\circ$ .

Якщо кут між двома площинами дорівнює  $90^\circ$ , то площини перпендикулярні.

Якщо дві площини перетинаються, то вони весь простір поділяють на 4 частини, які називають двогранними кутами.

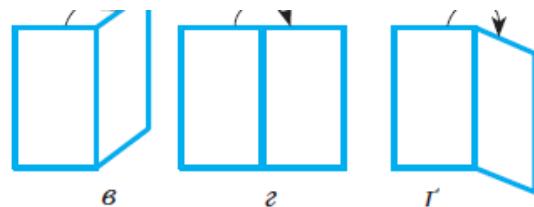
Півплощини, які обмежують двограний кут, називають його гранями, а їх спільну пряму — ребром двогранного кута (мал. 319). Фігуру, утворену двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує, також називають двограним кутом.



Мал. 318

!

Двограним кутом називають частину простору, обмежену двома півплощинами, які виходять з однієї прямої.



Мал. 321

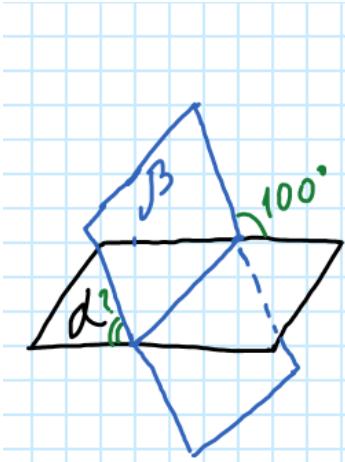
Кут, утворений перетином двогранного кута з площею, перпендикулярною до його ребра, називають лінійним кутом даного двогранного кута. Будь-які два лінійні кути двогранного кута рівні (мал. 320). Тому двогранні кути можна характеризувати відповідними лінійними кутами. Якщо, наприклад, лінійний кут деякого двогранного кута дорівнює  $60^\circ$ , то кажуть, що це — двограний кут  $60^\circ$ . Двограний кут називають гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від розгорнутого залежно від того, чи є його лінійний кут гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від розгорнутого (мал. 321).

1182. На малюнку 314  $AC_1$  — діагональ куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Під яким кутом нахиlena діагональ куба до кожної його грані?

*Розв'язання*

Жадо човесим тошику ( $ACC_1$ ), що побачимо, що  $ACC_1A_1$  — квадрат, а  $AC$  — діагональ квадрата. Діагоналі квадратів є бісектрисами відповідних кутів, а тому  $\angle CAC_1 = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ .

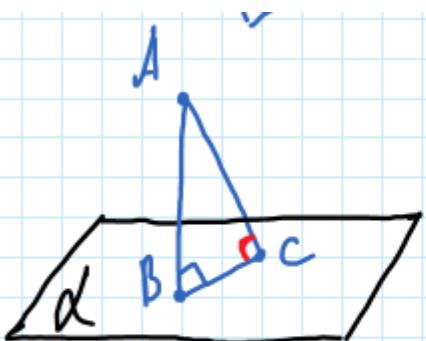
1186. Кут між двома площинами дорівнює  $100^\circ$ . Укажіть міру меншого з утворених двогранних кутів.



Розв'язання

Дані кути є суміжними, а оскільки в сумі мають опущені від вершини відповідні проекції на площину  $\beta$ , то  $150^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ .

1191. Похила вдвічі довша за її проекцію на площину. Знайдіть кут між похилою і площиною.



Дано:  $AB \perp d$ ,  $AC$ -похила,  
 $AC = 2BC$ .

Знайти:  $\angle ACD$ .

Розв'язання

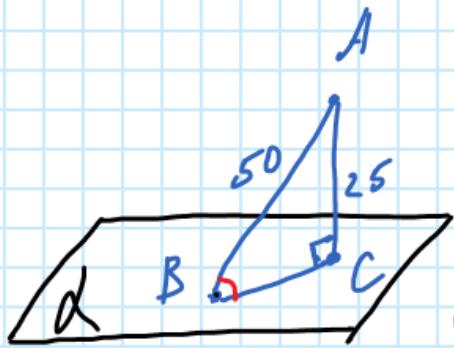
Розглянемо  $\triangle ABC$ . Іншо гіпотенуза  $AC$  вдвічі довша за катет  $BC$ , то кут нахилення є  $60^\circ$  за теоремою про сума кутів прямокутного трикутника, а отже  $\angle BAC = 30^\circ$ .

$\angle BAC + \angle ACD = 90^\circ$  за властивістю гострих кутів прямокутного трикутника, а отже  $\angle ACD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

Відповідь:  $\angle ACD = 60^\circ$ .

1195. Довжина похилої  $AB$  дорівнює 50 см, а точка  $A$  віддалена від площини на 25 см. Знайдіть кут між похилою і площиною.

1196. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних площин під кутом  $\alpha$ , то і другу площину вона перетинає під кутом  $\alpha$ .



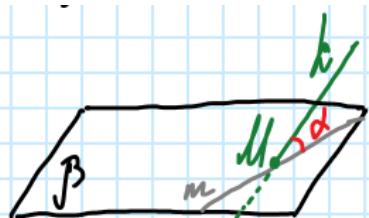
Дано:  $AB$  - катета,  
 $AB = 50 \text{ см}$ ,  $AC \perp d$ ,  
 $AC = 25 \text{ см}$ .

Знайти:  $\angle BAC$ .

Розв'язання

Розглянемо  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ). У цьому випадку  
 $AC = \frac{AB}{2}$ , тобто половина гіпотенузи, а отже  
 $\angle ABC = 30^\circ$ .

Відповідь:  $\angle ABC = 30^\circ$ .



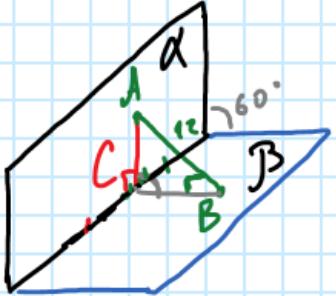
Дано:  $\beta \parallel \gamma$ ,  $m \subset \beta$ ,  $n \subset \gamma$ ,  
 $k \cap \beta = m$ ,  $k \cap \gamma = n$ ,  
 $\angle (k, m) = d$ .

Довести:  $\angle (k, n) = d$

Доведення

Оскільки  $m \subset \beta$ , а  $n \subset \gamma$ , то  $m \parallel n$  за властивістю паралельності площин. Тоді  $\angle (k, m)$  та  $\angle (k, n)$  – внутрішні рівносторонні кути  $m \parallel n$  та січної  $k$ .  
А тому  $\angle (k, m) = \angle (k, n) = d$ .

1201. Дано двогранний кут  $60^\circ$ . Точка  $A$  однієї його грані віддалена на 12 см від іншої. Знайдіть відстань від точки  $A$  до ребра даного двогранного кута.



Дано:  $\angle(\alpha, \beta) = 60^\circ$ ,  
 $A \in \alpha$ ,  $B \in \beta$ ,  $AB = 12 \text{ см}$ ,  
 $AC \perp \beta$ .

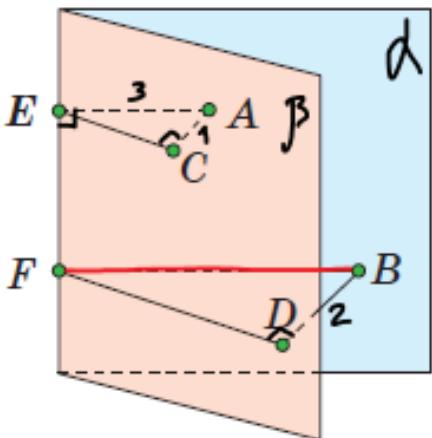
Знайти:  $AC$ .

Розв'язання

$$\angle ACB = 60^\circ, AB \perp \beta. \text{ Тоді } AC = \frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{12}{\sin 60^\circ} = \\ = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} \text{ см}$$

Відповідь:  $AC = 8\sqrt{3} \text{ см}$ .

1212. На одній грани двогранного кута дано дві точки  $A$  і  $B$  (мал. 327). З них опущено перпендикуляри на другу грань:  $AC = 1 \text{ дм}$ ,  $BD = 2 \text{ дм}$  та на ребра:  $AE = 3 \text{ дм}$  і  $BF = ?$ . Знайдіть  $BF$ .



Мал. 327

Дано:  $A \in \alpha$ ,  $B \in \beta$ ,  
 $AC \perp \beta$ ,  $AC = 1 \text{ дм}$ ,  
 $BD \perp \beta$ ,  $BD = 2 \text{ дм}$ ,  
 $AE \perp EF$ ,  $AE = 3 \text{ дм}$ .

Знайти:  $BF$

Розв'язання

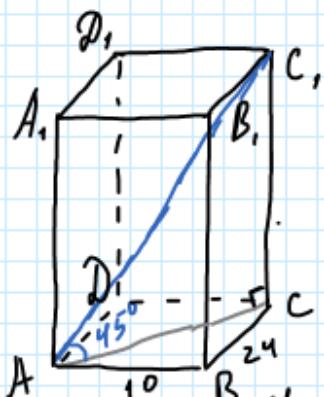
Розглянемо  $\triangle AEC$  і  $\triangle BFD$ .  
 Якщо:  $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ,

$\angle AEC = \angle BFD$  як лінійні кути звужуючо  
 кута. А отже  $\triangle AEC \sim \triangle BFD$  за двома углами.  
 Тому  $\frac{AC}{BD} = \frac{AE}{BF}$ .

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{BF} \Rightarrow BF = \frac{3 \cdot 2}{1} = 6 \text{ дм}$$

Відповідь:  $BF = 6 \text{ дм}$ .

1221. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з площиною його основи кут  $45^\circ$ . Сторони основи дорівнюють 10 см і 24 см. Визначте висоту паралелепіпеда.



Дано:  $ABC \nparallel A_1B_1C_1D_1$  - прямокутний паралелепіпед,  $\angle C, AC = 45^\circ$ ,  $AB = 10$  см,  $BC = 24$  см.  
Знайти:  $CC_1$ .

Розв'язання

Розглянемо  $\triangle AC, C$  ( $\angle C = 90^\circ$ ).

У цьому  $\angle C, AC = 45^\circ$ , а отже

$\angle AC, C = 90^\circ - \angle C, AC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ . Тоді  $\triangle AC, C$  - рівнобедрений, тому  $AC = CC_1$ .

Розглянемо  $\triangle ACB$  ( $\angle B = 90^\circ$ ). У цьому:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26 \text{ см}$$

$$CC_1 = AC = 26 \text{ см}$$

Відповідь:  $CC_1 = 26$  см.

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням

<https://forms.gle/UfcuMw43dSCGcxRQ9>.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com