31.10.2022

Група

Математика (геометрія)

Урок 1-2

Тема: Кут між прямими. Перпендикулярність прямих у просторі

Мета:

Навчальна - повторити поняття «кут», знайти різницю між плоским кутом у кутом у просторі; повторити та удосконалити знання про перпендикулярність; Розвивальна – розвинути просторову уяву, логічне мислення.

Матеріали до уроку:

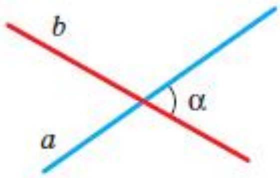
Розгляньте малюнок 250 і згадайте, як можуть розташовуватися у просторі дві прямі. Спробуйте уявити, які кути утворюють ці прямі в кожному випадку.

Мал. 250

Щоб увести поняття *кута між прямими* у просторі, слід розглянути три випадки:

- прямі перетинаються;
- прямі паралельні;
- прямі мимобіжні.

Якщо дві прямі перетинаються, вони утворюють чотири кути (мал. 251). Кутову міру не найбільшого з них називають *кутом між даними прямими, що перетинаються*. Кут між прямими, що перетинаються, не перевищує 90°.



Мал. 251

Позначають кут між прямими a і b символом $\angle(ab)$.

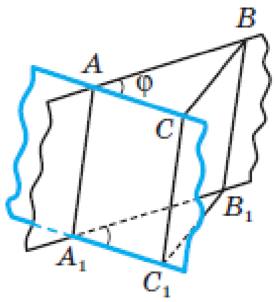
Зауваження. Кут між прямими — не фігура, а кутова міра, величина.

ТЕОРЕМА 9

Якщо дві прямі, які перетинаються, паралельні іншим прямим, що перетинаються, то кут між першими прямими дорівнює куту між другими.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямі AB і AC, що перетинаються, паралельні відповідно прямим A_1B_1 і A_1C_1. Доведемо, що кут між прямими AB і AC дорівнює куту між прямими A_1B_1 і A_1C_1 (мал. 252).



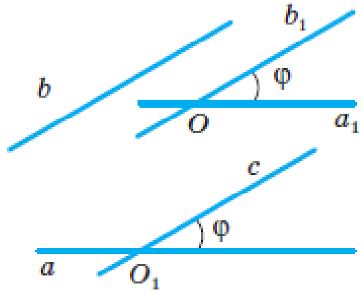
Мал. 252

Розглянемо спочатку випадок, коли дані прямі лежать у різних площинах. Якщо $\angle BAC = \varphi$ — кут між прямими AB і AC ($\varphi \le 90°$), то через довільні точки B і C його сторін проведемо прямі BB_1 і CC_1, паралельні AA_1.

Нехай прямі BB_1 і A_1B_1 перетинаються в точці B_1, а прямі CC_1 і A_1C_1 — у точці C_1. Чотирикутники AA_1B_1B і AA_1C_1C — паралелограми, оскільки їх протилежні сторони попарно паралельні. Відрізки BB_1 і CC_1 паралельні та рівні, оскільки кожний з них паралельний відрізку AA_1 і дорівнює йому. Отже, чотирикутник BB_1C_1C теж паралелограм, $CB = C_1B_1$. За трьома сторонами $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, тому $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC = \varphi$. Отже, кут між прямими A_1B_1 і A_1C_1 дорівнює куту між прямими AB і AC. □

У випадку, коли прямі AB, AC, A_1B_1 і A_1C_1 лежать в одній площині, можна дослівно повторити наведені міркування. Тільки точку C треба брати поза прямою BB_1, щоб паралелограм BB_1C_1C не вироджився у відрізок.

Тепер введемо поняття *кута між мимобіжними прямими*. Нехай a і b — довільні мимобіжні прямі. Через будь-яку точку O простору проведемо прямі a_1 і b_1, паралельні a і b (мал. 253). Кут φ між побудованими так прямими a_1 і b_1, які перетинаються, називають кутом між даними мимобіжними прямими $\angle(ab) = \angle(a_1b_1)$. Цей кут не залежить від вибору точки O. Адже, якщо через яку-небудь іншу точку простору провести прямі, паралельні прямим a і b, кут між ними теж дорівнює φ (теорема 9). Точку O можна брати і на будь-якій з даних прямих. Якщо $b \parallel c$, то завжди $\angle(ab) = \angle(ac)$.



Мал. 253

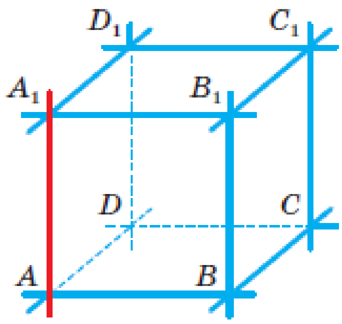
! **Кутом між мимобіжними прямими називають кут між прямими, які перетинаються і паралельні відповідно даним мимобіжним прямим.**

! Дві прямі називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Кут між мимобіжними прямими, як і між прямими однієї площини, не може мати більше від 90°. Кут між паралельними прямими вважають таким, що дорівнює 0°.

Перпендикулярними можуть бути як прямі, що перетинаються, так і мимобіжні прямі. Наприклад, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, то кожна з прямих AB, BC, CD, DA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 перпендикулярна до прямої AA_1 (мал. 254).

Відрізки (промені) називають перпендикулярними, якщо вони належать *перпендикулярним* прямим.



Мал. 254

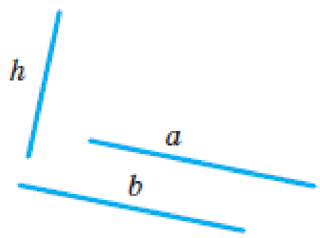
ТЕОРЕМА 10

Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямі a і b паралельні і $h \perp a$. Доведемо, що $h \perp b$ (мал. 255).

Якщо $b \parallel a$, то завжди $\angle(hb) = \angle(ha)$. У даному випадку $\angle(ha) = 90°$, тому і $\angle(hb) = 90°$, тобто $h \perp b$. Що й треба було довести. □

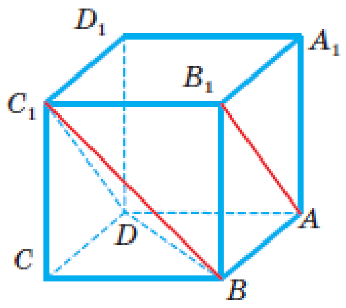


Мал. 255

Виконання вправ:

1) Знайдіть кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба.

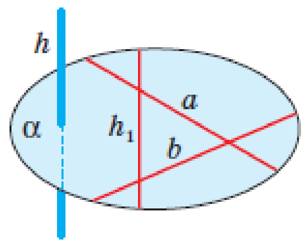
Розв'язання. Знайдемо кут між діагоналями AB_1 і BC_1 граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 258). Оскільки $DC_1 \parallel AB_1$, то кут між прямими AB_1 і BC_1 дорівнює куту BC_1D. $\angle BC_1D = 60°$, оскільки $\triangle BC_1D$ рівносторонній. Отже, кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба дорівнює 60°.



Мал. 258

2) Доведіть, що пряма, перпендикулярна до двох прямих, які перетинаються, перетинає площину, що проходить через них.

Розв'язання. Припустимо, що пряма h, перпендикулярна до двох прямих a і b, які перетинаються, не перетинає площину α, що проходить через них (мал. 259). Тоді $h \parallel \alpha$ або $h \subset \alpha$. В обох випадках у площині α знайдеться пряма h_1, паралельна h. І якщо пряма h перпендикулярна до прямих a і b, то паралельна їй пряма h_1 теж перпендикулярна до цих прямих. Прийшли до суперечності, оскільки пряма, яка лежить у площині, не може бути перпендикулярною до двох прямих цієї площини, що перетинаються. Отже, пряма h перетинає площину α.



Мал. 259

Домашнє завдання:

Підручник Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. 2018р.

Виконати №1013, 1019 ст.213

Зворотній зв'язок:
E-mail vitasergiivna1992@gmail.com