05.12.2022

Група 15

Математика (алгебра)

Урок 20-21

Тема: Тригонометричні функції числового аргументу

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв’язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Досі для вимірювання кутів ви використовували градуси або частини градуса — мінути та секунди.

У багатьох випадках зручно користуватися іншою одиницею виміру кутів. Її називають **радіаном**.

Означення. Кутом в один радіан називають центральний кут кола, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.

На рисунку 8.1 зображено центральний кут AOB, що спирається на дугу AB, довжина якої дорівнює радіусу кола. Величина кута AOB дорівнює одному радіану. Записують: $\angle AOB = 1$ рад. Також говорять, що радіанна міра дуги AB дорівнює одному радіану. Записують: $\cup AB = 1$ рад.

Радіанна міра кута (дуги) не залежить від радіуса кола. Це твердження проілюстровано на рисунку 8.2.

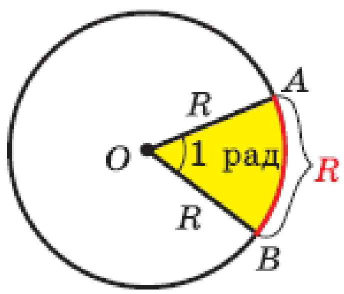


Рис. 8.1

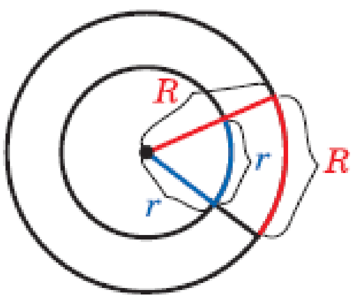


Рис. 8.2

Довжина півкола дорівнює πR. Отже, радіанна міра півкола дорівнює π рад. Градусна міра півкола становить 180°. Сказане дає змогу встановити зв'язок між радіанною та градусною мірами, а саме:

$$\pi \text{ рад} = 180°. \qquad (1)$$

Звідси

$$\boxed{1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}}$$

Поділивши 180 на 3,14 (нагадаємо, що $\pi \approx 3{,}14$), можна встановити: 1 рад ≈ 57°.

Якщо обидві частини рівності (1) поділити на 180, то отримаємо:

$$\boxed{1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{ рад}} \qquad (2)$$

Точні значення тригонометричних функцій при деяких значеннях аргументу $\left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right.$ і т. п.) можна визначати, користуючись одиничним колом. Вони наведені в таблиці 3 (с. 62).

> !
>
> Функції $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ називають **тригонометричними функціями числового аргументу**.

Таблиця 3

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	не існує

> !
>
> Вважають, що синус, косинус, тангенс, котангенс числа α дорівнюють відповідно синусу, косинусу, тангенсу, котангенсу кута α радіанів.

Отже, кожне твердження про тригонометричні функції числа α рівнозначне твердженню про тригонометричні функції кута α радіанів і навпаки. Зокрема, правильні формули

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Якщо x і y — абсциса й ордината якої-небудь точки одиничного кола, то $x^2 + y^2 = 1$ (мал. 60), $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$ — абсциса й ордината деякої точки одиничного кола (див. мал. 58). Тому, яке не було б дійсне число α, завжди $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Це — *основна тригонометрична тотожність*. Приєднавши до неї ще формули, які випливають з означення тангенса і котангенса, дістанемо такі тотожності (за умови, що $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ — існують):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad (1)$$

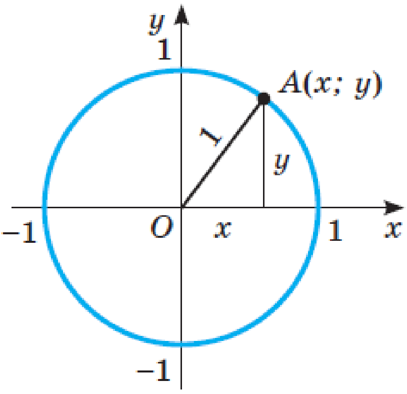
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad (2)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad (3)$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1; \quad (4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad (5)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \quad (6)$$



Мал. 60

8.1.° Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює:

1) 25°; 2) 40°; 3) 100°; 4) 160°; 5) 210°; 6) 300°.

8.2.° Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

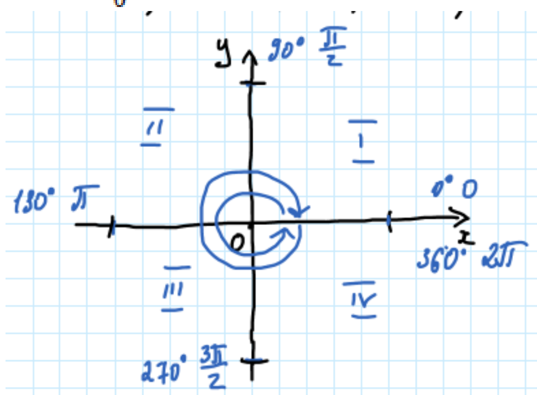
1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $1{,}2\pi$; 5) 3π; 6) $2{,}5\pi$.

№8.1. 1) $25° = 25°\cdot\frac{\pi}{180°}$ рад $= \frac{5\pi}{36}$ рад; 2) $40° = 40°\cdot\frac{\pi}{180°}$ рад $= \frac{2\pi}{9}$ рад;
3) $100° = 100°\cdot\frac{\pi}{180°} = \frac{5\pi}{9}$ рад; 4) $160° = 160°\cdot\frac{\pi}{180°}$ рад $= \frac{8\pi}{9}$;
5) $210° = 210°\cdot\frac{\pi}{180°} = \frac{7\pi}{6}$; 6) $300° = 300°\cdot\frac{\pi}{180°} = \frac{5\pi}{3}$.

№8.2. 1) $\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10}\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 18°$; 2) $\frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 30°$;
3) $\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9}\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 20°$; 4) $1{,}2\pi = 1{,}2\pi\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = \frac{12\pi}{10}\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 216°$;
5) $3\pi = 3\pi\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 540°$; 6) $2{,}5\pi = \frac{25\pi}{10}\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 450°$.

8.8.° У якій координатній чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0\,(1; 0)$ на кут:

1) 127°; 2) 89°; 3) 276°; 4) 400°; 5) 600°; 6) −400°; 7) −470°; 8) $\frac{\pi}{5}$; 9) $-\frac{7\pi}{6}$;



1) $127°$ — II чв.; 4) $400°$ — I чв.; 7) $-470°$ — III чв.;
2) $89°$ — I чв.; 5) $600°$ — III чв.; 8) $\frac{\pi}{5} = 36°$ — I чв.;
3) $276°$ — IV чв.; 6) $-400°$ — IV чв.; 9) $-\frac{7\pi}{6} = -210°$ — II чв.;

9.1.° Обчисліть значення виразу:

1) $2\cos 0° + 3\sin 90°$;
2) $\sin^2 60° + \cos^2 30°$;
3) $\sin 0° + \operatorname{tg}\pi - \sin\frac{3\pi}{2}$;
4) $2\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6}$.

9.2.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\cos 60° + \sin 30°$;
2) $7\operatorname{tg}^2 45° - 3\sin 45°$;
3) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;
4) $\cos\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2}$?

9.1. 3) $\sin 0° + \operatorname{tg}\pi - \sin\frac{3\pi}{2} = 0 + 0 - (-1) = 1$;

4) $2\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6} = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$

$= \overset{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{2}{\underset{2}{\cancel{4}}} + \frac{3}{4} = \frac{2}{2} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1,75$

9.2 3) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3} =$

$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} = 0 - (-1) = 1$.

9.3.° Чи є можливою рівність:

1) $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$;

1) $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} \approx \frac{3,14}{3} > 1$, а $\cos\alpha \in [-1; 1]$,

тому $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$ не існує.

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням https://forms.gle/GfFRj6PVMZv2iAce8.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com