

09.12.2022

Група 36

Математика (геометрія)

Урок 5-6

Тема уроку. Вектори в просторі

Мета уроку: формування знань учнів про вектори в просторі, дії над векторами, заданими координатами, Формування вмінь застосовувати вивчений матеріал до розв'язування задач.

Матеріали до уроку:

Вектори в просторі	
	<p>Координати вектора (рис. а) $\vec{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$</p>
	<p>Довжина вектора $\vec{a} (a_x; a_y; a_z): \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$</p>
	<p>Рівність векторів $\vec{a} (a_x; a_y; a_z) = \vec{b} (b_x; b_y; b_z) \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x; \\ a_y = b_y; \\ a_z = b_z \end{cases}$</p>
	<p>Сума векторів (рис. б) $\vec{a} (a_x; a_y; a_z) + \vec{b} (b_x; b_y; b_z) = \vec{c} (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z).$ $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM}$</p>
	<p>Різниця векторів (рис. в) $\vec{a} (a_x; a_y; a_z) - \vec{b} (b_x; b_y; b_z) = \vec{c} (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z).$ $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$</p>
	<p>Добуток вектора на число $\lambda \cdot \vec{a} (a_x; a_y; a_z) = \vec{c} (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$</p>
<p>Колінеарні вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні, якщо $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$</p>	

Приклад 42.5 Дано точки $A(5; -6; 7)$ і $B(8; -2; 7)$. Знайти абсолютну величину вектора AB .

Розв'язування: Знайдемо координати вектора $AB(x; y; z)$:

(потрібно від координат кінця $B(8; -2; 7)$ вектора AB відняти координати початку $A(5; -6; 7)$).

$$AB(8-5; -2+6; 7-7)=(3; 4; 0).$$

Знайдемо абсолютну величину (модуль, довжину) вектора $|AB|$:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{9+16+0} = \sqrt{25} = 5$$

Відповідь: 5

Приклад 42.6 Знайти довжину вектора AB , якщо $A(-1;1;-1)$ і $B(-1;1;1)$.

Розв'язування: Знайдемо координати вектора $AB(x;y;z)$:

(від кінця $B(-1;1;1)$ вектора AB віднімаємо координати початку $A(-1;1;-1)$).

$$AB(-1+1;1-1;1+1)=(0;0;2).$$

Знайдемо довжину (абсолютну величину) вектора $|AB|$:

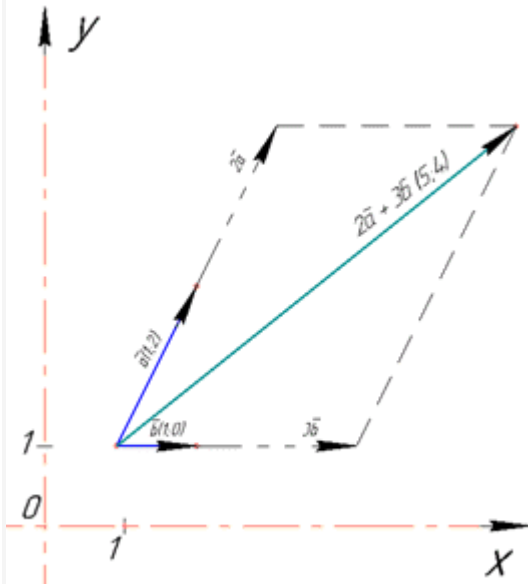
$$|AB| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|AB| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{0+0+4} = \sqrt{4} = 2$$

Відповідь: 2

Приклад 42.22 Знайти модуль вектора $2a+3b$, якщо $a(1;2)$, $b(1;0)$.

Розв'язування: Перш за все побудуємо задані вектори в декартовій площині.



Помножити вектор на число означає помножити кожен координату на це число:

$$2a=(2 \cdot 1; 2 \cdot 2)=(2;4),$$

$$3b=(3 \cdot 1; 3 \cdot 0)=(3;0).$$

Додати вектори означає додати їх відповідні координати:

$$2a+3b=(2+3;4+0)=(5;4).$$

Обчислимо модуль (довжину) вектора $2a+3b$:

$$|2\vec{a}+3\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

Відповідь: $\sqrt{41}$

Приклад 42.39 Дано вектор $a(2;1;-3)$. Знайти квадрат довжини вектора b , якщо $a \cdot b=7$ і вектор b колінеарний вектору a .

Розв'язування: Оскільки вектор b колінеарний вектору $a(2;1;-3)$, то їх відповідні координати пропорційні. Нехай x – коефіцієнт пропорційності, тоді $b(2x;x;-3x)$.

Знайдемо x з умови, що $a \cdot b=7$ (скалярний добуток векторів a і b дорівнює 7):

$$2 \cdot 2x + 1 \cdot x + (-3) \cdot (-3x) = 7$$

$$4x + x + 9x = 7$$

$$14x = 7, \quad x = \frac{7}{14} = 0,5$$

Отже, отримали $b(1;0,5;-1,5)$.

Знайдемо квадрат довжини вектора $b(1;0,5;-1,5)$:

$$|\vec{b}|^2 = 1^2 + (0,5)^2 + (-1,5)^2 = 1 + 0,25 + 2,25 = 1 + 2,5 = 3,5$$

Відповідь: 3,5.

Приклад 42.7 Серед векторів $a(4;14;2)$, $b(2;7;-1)$, $c(0;0;3)$, $d(-6;-21;3)$ знайти колінеарні.

Розв'язування: Вектори колінеарні, якщо лежать на паралельних або на одній прямій.

Якщо вектори колінеарні, то їх координати пропорційні!

Перевіримо колінеарність векторів a і b :

$$\frac{4}{2} = \frac{14}{7} \neq \frac{2}{-1}$$

координати не пропорційні, отже вектори a і b не є колінеарними.

Перевіримо колінеарність векторів a і c :

$$\frac{0}{4} = \frac{0}{14} \neq \frac{3}{2}$$

умова колінеарності не виконується, вектори a і c не є колінеарними.

Перевіримо колінеарність векторів a і d :

$$\frac{4}{-6} = \frac{14}{-21} \neq \frac{2}{3}$$

умова не виконується, вектори a і d не є колінеарними.

Перевіримо колінеарність векторів b і c :

$$\frac{0}{2} = \frac{0}{7} \neq \frac{3}{-1}$$

звідси вектори b і c не є колінеарними.

Перевіримо колінеарність векторів b і d :

$$\frac{-6}{2} = \frac{-21}{7} = \frac{3}{-1} = -3$$

координати пропорційні, отже вектори b і d **колінеарні**.

Приклад 42.8 За якого значення параметра n вектори $a(n+5;-8;n+1)$ і $b(5;1-n;3)$ колінеарні.

Розв'язування: Якщо вектори колінеарні, то їх координати пропорційні, тобто для векторів $a(a_x;a_y;a_z)$ і $b(b_x;b_y;b_z)$ має виконуватися умова:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

За умовою $a(n+5;-8;n+1)$ і $b(5;1-n;3)$ маємо

$$\frac{n+5}{5} = \frac{-8}{1-n} = \frac{n+1}{3}$$

Розв'яжемо рівняння:

$$\frac{n+5}{5} = \frac{-8}{1-n}$$

$$(n+5)(1-n) = -8 \cdot 5$$

$$n - n^2 + 5 - 5n = -40$$

$$-n^2 - 4n + 45 = 0$$

$$n^2 + 4n - 45 = 0$$

за теоремою Вієта отримаємо

$$n_1=5, n_2=-9.$$

Тепер перевіримо, чи отримані розв'язки задовольняють умову колінеарності з

третьою координатою:

$$\frac{n+5}{5} = \frac{n+1}{3}$$
$$\frac{5+5}{5} = \frac{5+1}{3} \quad \frac{-9+5}{5} = \frac{-9+1}{3}$$
$$\frac{10}{5} = \frac{6}{3} \quad \frac{-4}{5} \neq \frac{-8}{3}$$
$$2 = 2$$

Робимо висновок, що при $n=5$ задані вектори a і b задовольняють

умову $\frac{n+5}{5} = \frac{-8}{1-n} = \frac{n+1}{3}$, тому їх координати пропорційні, а самі вектори $a(10;-8;6)$ і $b(5;-4;3)$ колінеарні.

Відповідь: 5

Приклад 42.36 Дано вектори $a(-2;0)$, $b(1;-1)$ і $c(2;3)$.

За якого значення параметра k вектори $2a-k \cdot b$ і c будуть колінеарними?

Розв'язування: Знайдемо координати вектора $2a-k \cdot b$:

$$2\vec{a} - k\vec{b} = (2 \cdot (-2) - k \cdot 1; 2 \cdot 0 - k \cdot (-1)) = (-4 - k; k)$$

Вектори $2a-k \cdot b$ і c колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{-4-k}{2} = \frac{k}{3}$$
$$(-4-k) \cdot 3 = k \cdot 2$$
$$-12 - 3k = 2k$$
$$-3k - 2k = 12$$
$$-5k = 12$$
$$k = 12 : (-5) = -2,4$$

При $k=-2,4$ вектори $2a-k \cdot b$ і c (тобто $2a-k \cdot b = (-1,6;-2,4)$ і $c(2;3)$) будуть колінеарними.

Відповідь: -2,4.

Домашнє завдання:

Дано вектори:

$$\vec{a}(3; 0; 4); \vec{b}(7; 0; 2)$$

Запишіть:

- 1) координати вектора \vec{c} , якщо $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$,
- 2) координати вектора \vec{d} , якщо $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b}$;
- 3) довжину вектора $\vec{a} + \vec{b}$;
- 4) при якому значенні k вектор $\vec{n}(k; 0; 6)$ колінеарний вектору \vec{b}

Зворотній зв'язок:

Email: vitasergiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.