14.12.2022

Група 16

Математика (алгебра)

Урок 24-25

Тема: Формули зведення

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Періодичність тригонометричних функцій дає змогу зводити обчислення значень синуса та косинуса до випадку, коли значення аргументу належить проміжку $[0; 2\pi]$. У цьому пункті ми розглянемо формули, які дають можливість у таких обчисленнях обмежитися лише кутами з проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Кожний кут із проміжку $[0; 2\pi]$ можна подати у вигляді $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, або $\pi \pm \alpha$, або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, де $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Наприклад, $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$.

Обчислення синусів і косинусів кутів виду $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ можна звести до обчислення синуса або косинуса кута α. Наприклад:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = -\sin\alpha.$$

Застосовуючи формули додавання, аналогічно можна отримати:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha & \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha & \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha \end{array}}$$

Ці формули називають формулами зведення для синуса.

Наведені нижче формули називають формулами зведення для косинуса:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$$

Проаналізувавши записані формули зведення, можна помітити закономірності, завдяки яким необов'язково заучувати ці формули.

Для того щоб записати будь-яку з них, можна керуватися такими правилами.

1. ***У правій частині рівності ставлять той знак, який має ліва частина за умови, що*** $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2. ***Якщо в лівій частині формули аргумент має вигляд*** $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ***або*** $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, ***то синус замінюють на косинус і навпаки. Якщо аргумент має вигляд*** $\pi\pm\alpha$, ***то заміни функції не відбувається.***

Покажемо, як застосувати ці правила для виразу $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

Припустивши, що $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, доходимо висновку: $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ є кутом III координатної чверті. Тоді $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)<0$. За першим правилом у правій частині рівності має стояти знак «–».

Оскільки аргумент має вигляд $\frac{3\pi}{2}-\alpha$, то за другим правилом потрібно замінити синус на косинус.

Отже, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

158. Зведіть до тригонометричної функції кута α:

1) $\sin(\pi-\alpha)$;
2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;
3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;
4) $\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)$;
5) $\sin^2\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$;
6) $\cos^2(360^\circ-\alpha)$.

1) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$;

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$;

3) $tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -ctg\alpha$;

4) $ctg(\alpha - \pi) = ctg(-\pi + \alpha) = -ctg(\pi - \alpha) = -\frac{\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)} =$
$= -\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = ctg\alpha.$

159. Зведіть до значення тригонометричної функції додатного аргументу, меншого від $45°$ $\left(\text{або } \frac{\pi}{4}\right)$:

1) $\cos 127°$;
2) $tg\,172°$;
3) $\sin 219°$;
4) $ctg\,194°$;
5) $\cos 400°$;
6) $tg(-298°)$;
7) $\cos 1{,}2\pi$;
8) $\sin\frac{5\pi}{9}$;
9) $\sin 1916°$;
10) $\cos 3000°$;
11) $tg\,4{,}3\pi$;
12) $ctg\frac{21\pi}{8}$.

1) $\cos 127° = \cos(90° + 37°) = -\sin 37°$;

2) $tg\,172° = tg(180° - 8°) = \frac{\sin(180°-8°)}{\cos(180°-8°)} = \frac{\sin 8°}{-\cos 8°} = -tg\,8°$;

3) $\sin 219° = \sin(180° + 39°) = -\sin 39°$.

4) $ctg\,194° = \frac{\cos 194°}{\sin 194°} = \frac{\cos(180°+14°)}{\sin(180°+14°)} = \frac{-\cos 14°}{-\sin 14°} = ctg\,14°$;

5) $\cos 400° = \cos(270° + 130°) = \sin 130° = \sin(90° + 40°) =$
$= \cos 40°$;

7) $\cos 1{,}2\pi = \cos(\pi + 0{,}2\pi) = -\cos\frac{\pi}{5}$;

8) $\sin\frac{5\pi}{9} = \sin\left(\frac{5\pi}{9}\cdot\frac{180}{\pi}\right) = \sin 100° = \sin(90° + 10°) = \cos 10°$;

9) $\sin 1916° = \sin(360°\cdot 5 + 116°) = \sin 116° = \sin(90° + 26°) =$
$= \cos 26°$;

10) $\cos 3000° = \cos(360°\cdot 8 + 120°) = \cos 120° = \cos(90° + 30°) =$
$= -\sin 30° = -\frac{1}{2}$;

11) $tg\,4{,}3\pi = \frac{\sin 4{,}3\pi}{\cos 4{,}3\pi} = \frac{\sin\left(4{,}3\pi\cdot\frac{180}{\pi}\right)}{\cos\left(4{,}3\pi\cdot\frac{180}{\pi}\right)} = \frac{\sin 774°}{\cos 774°} = \frac{\sin(360°\cdot 2 + 54°)}{\cos(360°\cdot 2 + 54°)} =$
$= \frac{\sin 54°}{\cos 54°} = \frac{\sin(90° - 36°)}{\cos(90° - 36°)} = \frac{\cos 36°}{\sin 36°} = ctg\,36°$

160. Обчисліть:

1) $\sin 120^\circ$;
2) $\cos 225^\circ$;
3) $\mathrm{tg}(-240^\circ)$;
4) $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$;
5) $\mathrm{ctg}\,\frac{11\pi}{6}$;
6) $\cos 10\pi$;
7) $\sin 1110^\circ$;
8) $\cos\frac{74\pi}{3}$;
9) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{20\pi}{3}\right)$.

1) $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\mathrm{tg}\,240^\circ = \mathrm{tg}(270^\circ - 30^\circ) = \frac{\sin(270^\circ-30^\circ)}{\cos(270^\circ-30^\circ)} = \frac{-\cos 30^\circ}{-\sin 30^\circ} = \mathrm{ctg}\,30^\circ =$
$= \sqrt{3}$;

5) $\mathrm{ctg}\,\frac{11\pi}{6} = \mathrm{ctg}\left(\frac{11\cancel{\pi}}{\cancel{6}_{1}} \cdot \frac{\cancel{180}^{30}}{\cancel{\pi}}\right) = \mathrm{ctg}\,330^\circ = \frac{\cos(270^\circ + 60^\circ)}{\sin(270^\circ + 60^\circ)} =$
$= \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \mathrm{ctg}\,60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\frac{5\cancel{\pi}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{180}^{45}}{\cancel{\pi}}\right) = \cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ =$
$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

6) $\cos 10\pi = \cos\left(10\cancel{\pi} \cdot \frac{180}{\cancel{\pi}}\right) = \cos 1800^\circ = \cos(360^\circ \cdot 5 + 0^\circ) =$
$= \cos 0^\circ = 1$;

7) $\sin 1110^\circ = \sin(360^\circ \cdot 3 + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$;

8) $\cos\frac{74\pi}{3} = \cos\left(\frac{74\cancel{\pi}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{180}^{60}}{\cancel{\pi}}\right) = \cos 4440^\circ = \cos(360^\circ \cdot 12 + 120^\circ) =$
$= \cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$;

9) $\mathrm{ctg}\,\frac{20\pi}{3} = \mathrm{ctg}\left(\frac{20\cancel{\pi}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{180}^{60}}{\cancel{\pi}}\right) = \mathrm{ctg}\,1200^\circ = \mathrm{ctg}(360^\circ \cdot 3 + 120^\circ) =$
$= \frac{\cos 120^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{\cos(90^\circ + 30^\circ)}{\sin(90^\circ + 30^\circ)} = \frac{-\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = -\mathrm{tg}\,30^\circ = -\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}$.

161. Знайдіть значення виразу:

1) $3\mathrm{ctg}\,135^\circ + 2\cos 120^\circ + \mathrm{tg}\,420^\circ + 2\sin 300^\circ$;
2) $\sin\frac{7\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{6}\,\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\mathrm{ctg}\,\frac{4\pi}{3}$;
3) $\mathrm{tg}\,41^\circ\,\mathrm{tg}\,42^\circ\,\mathrm{tg}\,43^\circ \ldots \mathrm{tg}\,49^\circ$;
4) $\sin 200^\circ \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cos 50^\circ$.

1) $3ctg\,135^\circ + 2\cos 120^\circ + tg\,420^\circ + 2\sin 300^\circ = 3\cdot\frac{\cos(90^\circ+45^\circ)}{\sin(90^\circ+45^\circ)} +$
$+ 2\cos(90^\circ+30^\circ) + \frac{\sin(360^\circ+60^\circ)}{\cos(360^\circ+60^\circ)} + 2\cdot\sin(270^\circ+30^\circ) = 3\cdot\frac{-\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} +$
$+ 2\cdot(-\sin 30^\circ) + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} + 2\cdot(-\cos 30^\circ) = 3\cdot(-tg\,45^\circ) - 2\sin 30^\circ +$
$+ tg\,60^\circ - 2\cos 30^\circ = -3\cdot 1 - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + \sqrt{3} - \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = -3 - 1 + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{3}} =$
$= 4;$

2) $\sin\frac{7\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{6}\,tg\frac{5\pi}{3}\,ctg\frac{4\pi}{3} = \sin 315^\circ\cdot\cos 210^\circ\cdot tg\,300^\circ\cdot ctg\,240^\circ =$

$= \sin(270^\circ+45^\circ)\cdot\cos(270^\circ-60^\circ)\cdot\frac{\sin(270^\circ+30^\circ)}{\cos(270^\circ+30^\circ)}\cdot$
$\cdot\frac{\cos(270^\circ-30^\circ)}{\sin(270^\circ-30^\circ)} = -\cos 45^\circ\cdot(-\sin 60^\circ)\cdot\frac{-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}\cdot$
$\cdot\frac{-\sin 30^\circ}{-\cos 30^\circ} = \cos 45^\circ\sin 60^\circ\cdot(-ctg\,30^\circ)\cdot tg\,30^\circ =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{(\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{6}}{6} =$
$= -\frac{\cancel{3}^{1}\sqrt{6}}{\cancel{6}_{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\frac{7\cancel{\pi}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{180}^{45}}{\cancel{\pi}} = 315^\circ$

$\frac{7\cancel{\pi}}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{180}^{30}}{\cancel{\pi}} = 210^\circ$

$\frac{5\cancel{\pi}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{180}^{60}}{\cancel{\pi}} = 300^\circ$

$\frac{4\cancel{\pi}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{180}^{60}}{\cancel{\pi}} = 240^\circ$

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням https://forms.gle/BYXp3pPWh6uwZ3u9A.

Зворотній зв'язок:
E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com