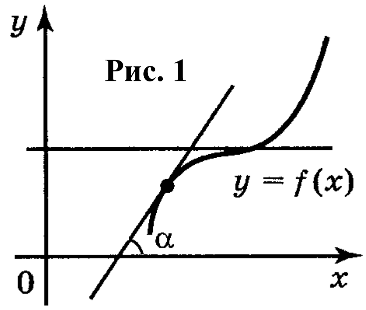
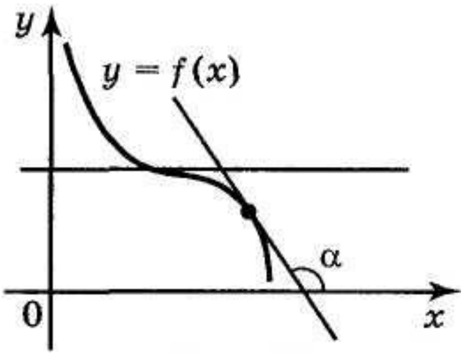
17.11.2022
Група 23
Математика (алгебра)
Урок 9-10
Тема: Ознака сталості функції. Достатні умови зростання і спадання функції
Мета: домогтися засвоєння ознаки сталості функції, достатніх умов зростання та спадання функції; сформувати вміння застосовувати ці ознаки до розв'язування задач

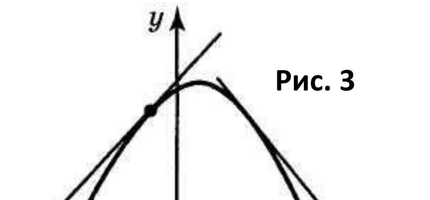
Матеріали до уроку:



На сьогоднішньому занятті за допомогою похідної будемо визначати проміжки зростання і спадання функції.
Відомо, що функція *y* = *f(x)* називається зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2, що належать проміжку, із умови $x_2 > x_1$ випливає, що $f(x_2) > f(x_1)$.

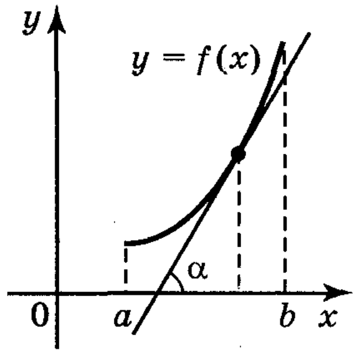


Дотична в кожній точці графіка зростаючої функції, як видно з даного рисунку, утворює з додатним напрямом осі ОХ або гострий кут, або кут, що дорівнює нулю (в останньому випадку дотична паралельна осі ОХ).
Виходячи із геометричного змісту похідної: $tg\ \alpha = f'(x_o)$, це означає, що похідна в кожній точці проміжку невід'ємна, тому для
зростаючої функції *f(x)* виконується умова: $f'(x) \ge 0$.
Функція *y* = *f(x)* називається спадною на проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2, що належать цьому проміжку, із умови $x_2 > x_1$ випливає, що $f(x_2) < f(x_1)$. Дотична в кожній точці графіка спадної функції (рис. 2) утворює з віссю *OX* або тупий кут, або кут, що дорівнює нулю, тому для функції *f(x),* яка спадає на деякому проміжку, виконується умова $f'(x) < O$.
На рис. 3 видно також, що одна і та ж функція може на одному проміжку області її визначення зростати, а на іншому — спадати. Характер поведінки функції на кожному із цих проміжків визначається знаком її похідної.



Отже, наочне уявлення дозволяє спадних функцій.
Якщо функція *y* = *f(x)* диференційована і зростає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку не від'ємна
Якщо функція *y* = *f(x)* диференційована і спадає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку не додатна.

Рис. 4



Проте для розв'язування задач особливо важливими є обернені твердження, які виражають ознаки зростання і спадання функції на проміжку. Нехай значення похідної функції *y* = *f(x)* додатні на деякому проміжку, тобто $f'(x) > 0$. Оскільки $f'(x) = \text{tg}\ \alpha$, то із умови $\text{tg}\ \alpha > 0$ випливає, що дотичні, проведені до графіка функції в будь-якій точці цього інтервалу, утворюють гострі кути

з додатним напрямом осі OX. У цьому випадку графік функції «піднімається»на заданому проміжку, тобтофункція зростає (рис. 4).

Якщо $f'(x) < 0$ на деякому проміжку, то кутовий коефіцієнт дотичної $\text{tg}\,\alpha = f(x)$ до графіка функції $y = f(x)$ від'ємний. Це означає, що дотична до графіка функції утворює з віссю OX тупий кут і графік функції на цьому проміжку «опускається», тобто функція $f(x)$ спадає (рис. 5).

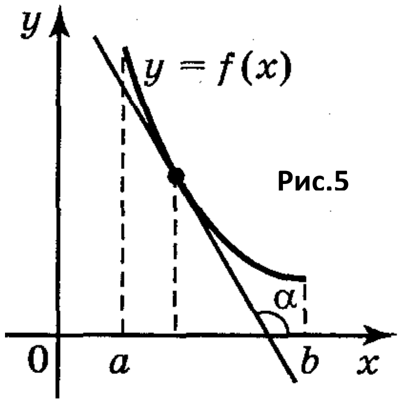


Рис.5

Якщо $f'(x) > 0$ на проміжку, то функція $f(x)$ зростає на цьому проміжку.

Якщо $f(x) < 0$ на проміжку, то функція $f(x)$ спадає на цьому проміжку.

Ці два твердження називаються ознаками зростання (спадання) функції на проміжку.

Проміжки зростання і спадання функції часто називають проміжками монотонності цієї функції.

Приклад 1. Доведіть, що функція $f(x) = x + \frac{1}{x}$ зростає на проміжку $(1; +\infty)$.

Розв'язання

Знайдемо похідну: $f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^I = (x)' + \left(\frac{1}{x}\right)^I = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

Якщо $x > 1$, $\frac{x^2 - 1}{x^2} > 0$ то тобто $f'(x) > 0$ при $x > 1$, і тому функція зростає на проміжку $(1; +\infty)$.

Знаходження проміжків зростання та спадання функції можна виконувати за таким планом:

Знайти область визначення заданої функції $y = f(x)$.

Знайти похідну $f'(x)$.

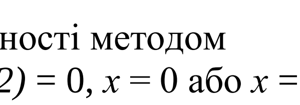
3. Розв'язати нерівності

а) $f'(x) > 0$, указати проміжки зростання функції $y = f(x)$;

б) $f'(x) < 0$, указати проміжки спадання функції $y = f(x)$·

Приклад 2. Знайдіть проміжки монотонності функції $y = x^3 - 3x^2$.

Рис. 6



Розв'язання

Область визначення функції: $D(y) = R$.

Знаходимо похідну $y' = 3x^2 - 6x$.

Розв'язуємо нерівності: а) $y' > 0$; б) $y' < 0$. Розв'язуємо ці нерівності методом інтервалів, для цього знаходимо нулі похідної: $3x^2 - 6x = 0$, $3x(x - 2) = 0$, $x = 0$ або $x = 2$. Наносимо на координатну пряму (рис. 6) нулі похідної і визначаємо знаки похідної на кожному проміжку:

$y'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 3 + 6 = 9 > 0;$

$y'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 - 1 = -3 < 0;$

$y'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 = 9 > 0.$

а) $y' > 0$ в кожному із проміжків *($-\infty$; 0); (2; $+\infty$)*, отже, функція на цих проміжках зростає.

б) $y' < 0$ на проміжку (0; 2), отже, функція на цьому проміжку спадає.

Відповідь: функція зростає на кожному із проміжків ($-\infty$;0)**;**(2;$+\infty$); спадає на проміжку (0; 2).

Виконання вправ:

Вправа 1

Знайдіть проміжки зростання функції $y = x^2 + 6x + 8$

Розв'язання:на проміжках зростання похідна функції додатна – запам'ятайте це. Знаходимо похідну функції $y^1 = 2x + 6$ умови рівності нулю визначаємо точку локального екстремуму $2x + 6 = 0$; $x = -6 \div 2 = -3$. В цій точці похідна функції змінює знак, зліва – від'ємна, справа додатна. Функція зростає на інтервалі $x \in (-3; +\infty)$.

Вправа 2

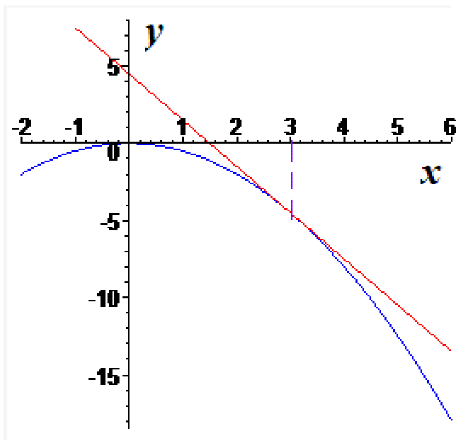
Обчисліть $f^1(1)$, якщо кут між дотичною, проведеною до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$, і додатним напрямком осі *Ох* дорівнює 30^0.

Розв'язання: геометричний зміст похідної і точці полягає у тому, що вона рівна тангенсу кута нахилу дотичної. Знайдемо тангенс 30^0 $f^1(1) = tg(30\circ) = \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Вправа 3

До графіка функції $y = -0{,}5x^2$ проведено дотичну у точці з абсцисою $x_0 = 3$. Обчисліть тангенс кута нахилу цієї дотичної до додатного напряму осі абсцис.

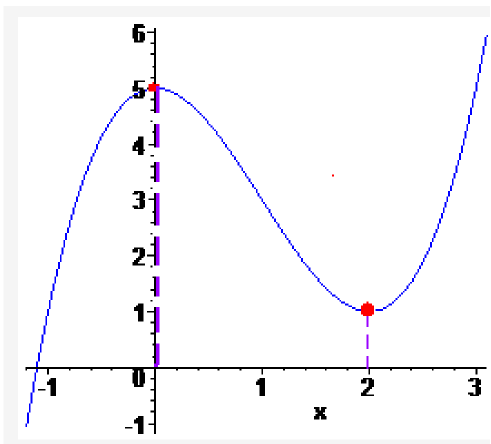
Розв'язання: Обчислимо похідну функції $y^1 = -0{,}5 \cdot 2x = -x$. Тангенс рівний похідній в точці дотику $tg(f) = y^1(3) = -3$. Графік функції із дотичною наведено на рисунку



Вправа 4

Знайдіть стаціонарні точки функції $y = x^3 - 3x^2 + 5$

Розв'язання: критичні точки – це нулі похідної функції. Знайдемо похідну $y^1 = 3x^2 - 6x$ та прирівняємо до нуля $3x(x-2) = 0$; $x = 0$; $x = 2$. Графік ілюструє поведінку функції та вигляд біля знайдених точок

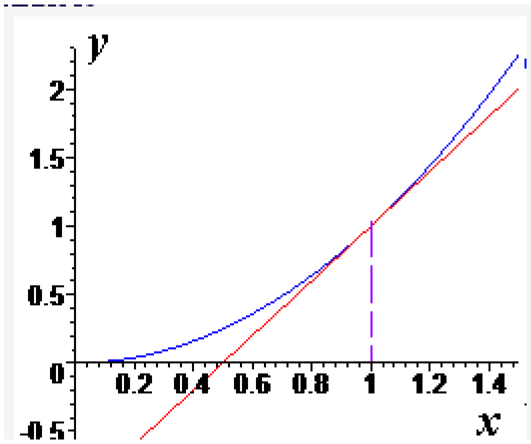


Вправа 5

Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці А(1;1).

Розв'язання: обчислимо значення похідної функції $y^1 = 2x$; $y^1(1) = 2\cdot 1 = 2$. Рівняння дотичної складемо за форму $y = f^1(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = 2(x-1)+1 = 2x-2+1 = 2x-1$. Графік дотичної до функції наведено нижче

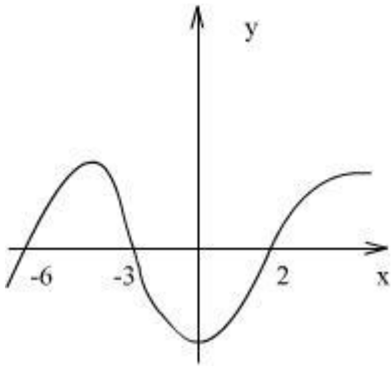


Домашнє завдання:

- Зробити конспект

- Тести для самоконтролю

1. Функція y=f(x) визначена на множині дійсних чисел і має похідну в кожній точці області визначення. На рисунку зображено графік її похідної y=f′(x). Визначте проміжки зростання функції y=f(x).



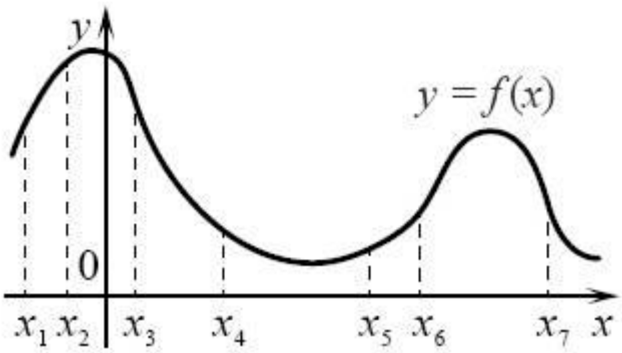
А [-3; 2]

Б визначити не можна

В (-∞;-4] і [0; +∞)

Г [-6; -3] і [2; +∞)

2. На рисунку зображено графік функції y=f(x). Користуючись графіком, порівняти f'(x_3) і f'(x_6).



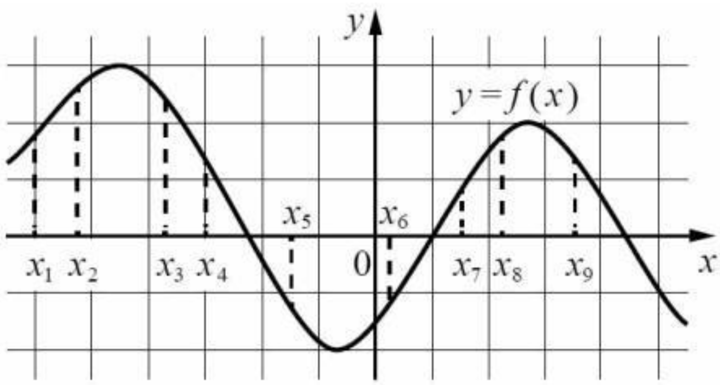
А порівняти неможливо

Б f'(x3) < f'(x6)

В f'(x3) > f'(x6)

Г f'(x3) = f'(x6)

3. Скільки критичних точок на проміжку [x_1;x_9] має функція, графік якої зображено на рисунку?



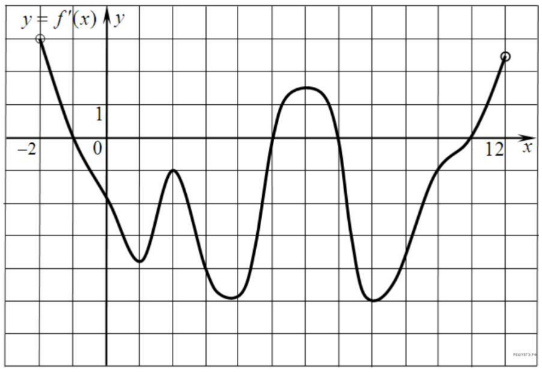
А 9

Б 8

В 7

Г 3

4. На рисунку зображено графік похідної функції y=f(x), визначеної на проміжку [-2; 12]. Скільки проміжків спадання має функція?



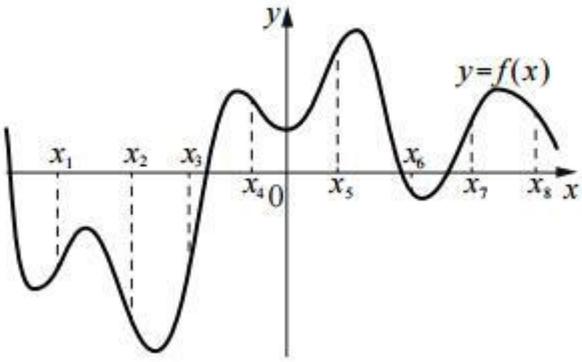
А не можна визначити

Б 2

В 1

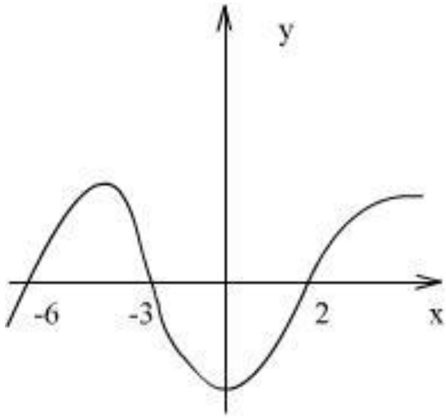
Г 3

5. На рисунку зображено графік функції y=f(x). Користуючись графіком, порівняти f'(x_7) і f'(x_8).



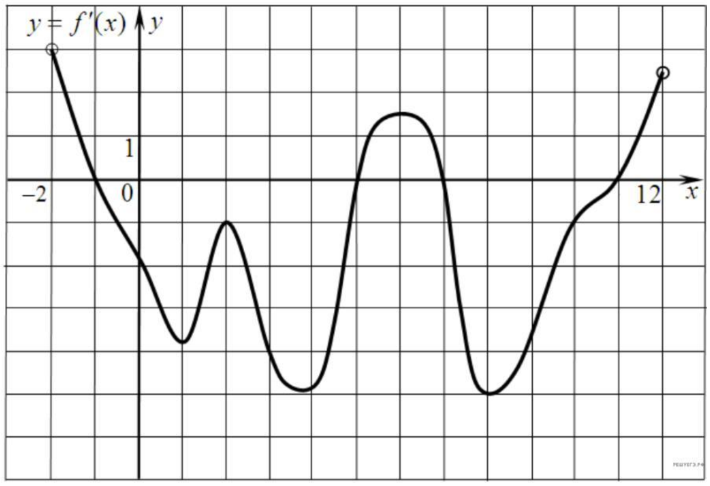
А f'(x7) = f'(x8)
Б f'(x7) > f'(x8)
В порівняти неможливо
Г f'(x7)   < f'(x8)

6. Функція y=f(x) визначена на множині дійсних чисел і має похідну в кожній точці області визначення. На рисунку зображено графік її похідної y=f′(x). Укажіть точки мінімуму функції y=f(x).



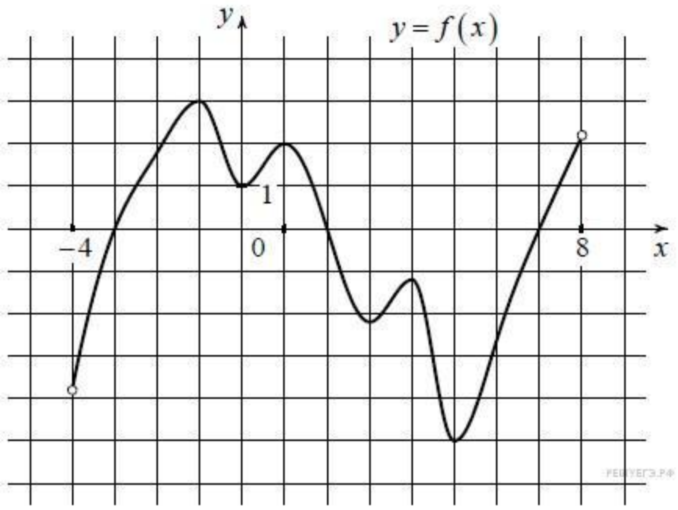
А 0
Б -6; -3; 2;
В -4
Г -6; 2

7. Функція y=f(x) визначена на проміжку [-2; 12] і має похідну в кожній точці області визначення. На рисунку зображено графік її похідної y=f'(x). Скільки точок екстремуму має функція y=f(x)?



А 4 точки
Б жодної точки
В 1 точку
Г 2 точки

8. Функція y=f(x) визначена на множині дійсних чисел і має похідну в кожній точці області визначення. Скільки точок екстремуму має функція?



А 4
Б 3
В 6
Г 8

Зворотній зв’язок:
Email: vitasergiivna1992@gmail.com
!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.