

**20.12.2022**

**Група 22**

**Математика (геометрія)**

**Урок 17-18**

**Тема:** Скалярний добуток векторів

**Мета:**

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

**Матеріали до уроку:**

Нехай  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  — два ненульових і неспівнаправлених вектори. Від довільної точки  $O$  відкладемо вектори  $\vec{OA}$  і  $\vec{OB}$ , що дорівнюють відповідно векторам  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  (рис. 42.1). Величину кута  $AOB$  називатимемо **кутом між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$** .

Кут між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  позначають так:  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ . Очевидно, що коли  $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ , то  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$  (рис. 42.2).

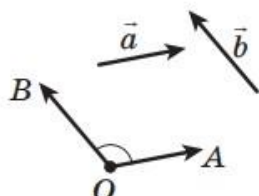


Рис. 42.1

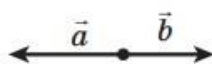


Рис. 42.2

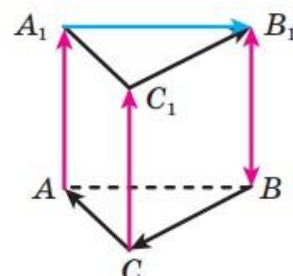


Рис. 42.3

Якщо  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ , то вважають, що  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ . Якщо хоча б один із векторів  $\vec{a}$  або  $\vec{b}$  нульовий, то також вважають, що  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ .

Вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює  $90^\circ$ . Записують:  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

На рисунку 42.3 зображено трикутну призму, основою якої є правильний трикутник, а бічне ребро перпендикулярне до площини основи.

Маємо:  $\angle(\vec{CA}, \vec{C_1B_1}) = 60^\circ$ ,  $\angle(\vec{BC}, \vec{A_1B_1}) = 120^\circ$ ,  $\angle(\vec{AA_1}, \vec{BB_1}) = 0^\circ$ ,  $\angle(\vec{AA_1}, \vec{BC}) = 90^\circ$ ,  $\angle(\vec{CC_1}, \vec{B_1B}) = 180^\circ$ .

**Означення.** Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними.

Скалярний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  позначають так:  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Маємо:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$ .

Якщо хоча б один із векторів  $\vec{a}$  або  $\vec{b}$  нульовий, то очевидно, що  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

Скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  називають скалярним квадратом вектора  $\vec{a}$  і позначають  $\vec{a}^2$ .

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ .

**Теорема 42.1.** Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

Наприклад, для векторів, зображених на рисунку 42.3, маємо:  $\overline{AA_1} \cdot \overline{BC} = 0$ ,  $\overline{B_1A_1} \cdot \overline{C_1C} = 0$ .

**Теорема 42.2.** Скалярний добуток векторів  $\vec{a} (a_1; a_2; a_3)$  і  $\vec{b} (b_1; b_2; b_3)$  можна обчислити за формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

**Теорема 42.3.** Косинус кута між ненульовими векторами  $\vec{a} (a_1; a_2; a_3)$  і  $\vec{b} (b_1; b_2; b_3)$  можна обчислити за формулою

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Деякі властивості скалярного добутку векторів аналогічні відповідним властивостям добутку чисел. Наприклад,

для будь-яких векторів  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  і будь-якого числа  $k \in$  справедливими рівності:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b});$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

42.3.° Знайдіть скалярний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , якщо:

1)  $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 5$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ ;

2)  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 7$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$ .

$$1) |\vec{a}| = 2\sqrt{3}, |\vec{b}| = 5, \angle(\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{3} \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ = 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot 3 = 15$$

$$2) |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 7, \angle(\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 7 \cdot \cos 135^\circ = 4 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -28\frac{\sqrt{2}}{2} = -14\sqrt{2}$$

42.5.° Знайдіть скалярний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , якщо:

1)  $\vec{a} (1; -2; 3)$ ,  $\vec{b} (2; -4; 3)$ ;      2)  $\vec{a} (-9; 4; 5)$ ,  $\vec{b} (3; -1; 4)$ .

$$1) \vec{a} (4; -1; 3), \vec{b} (2; -4; 3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) + 3 \cdot 3 = 8 + 4 + 9 = 21$$

$$2) \vec{a} (-9; 4; 5), \vec{b} (3; -1; 4)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -9 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 = -27 - 4 + 20 = -11$$

42.7.° Дано вектори  $\vec{m} (3; -2; 4)$  і  $\vec{n} (2; 2; z)$ . При якому значенні  $z$  виконується рівність  $\vec{m} \cdot \vec{n} = 18$ ?

$$\vec{m} (3; -2; 4), \vec{n} (2; 2; z), \vec{m} \cdot \vec{n} = 18, z = ?$$

$$3 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 4z = 18$$

$$6 - 4 + 4z = 18 \quad 4z = 16$$

$$2 + 4z = 18 \quad z = \frac{16}{4}$$

$$4z = 18 - 2 \quad z = 4$$

42.9.° Серед векторів  $\vec{a} (1; 1; 2)$ ,  $\vec{b} (1; 2; 1)$  і  $\vec{c} (-5; 3; 1)$  укажіть пару перпендикулярних векторів.

$$\vec{a} (1; 1; 2), \vec{b} (1; 2; 1), \vec{c} (-5; 3; 1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 + 2 = 5$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = -5 + 6 + 1 = 2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot (-5) + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = -5 + 3 + 2 = 0 \text{ — перпендикулярні.}$$

42.10.\* Кут між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  дорівнює  $45^\circ$ ,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$ .

Знайдіть:

1)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ ;      2)  $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$ ;      3)  $(\vec{a} - \vec{b})^2$ .

$$\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ, |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 3\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} 1) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = \\ &= 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ + (3\sqrt{2})^2 = 9\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 9 \cdot 2 = \frac{9 \cdot 2}{2} + \frac{18}{1} = \\ &= \frac{18 + 36}{2} = \frac{54}{2} = 27. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} &= 2\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a} = 2 \cdot |\vec{a}|^2 - |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \angle(\vec{b}; \vec{a}) = \\ &= 2 \cdot 3^2 - 3\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos 45^\circ = 18 - 9\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{18 \cdot 2}{2} - \frac{18}{2} = \frac{36 - 18}{2} = 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) (\vec{a} - \vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ + (3\sqrt{2})^2 = \\ &= 9 - 18\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 9 \cdot 2 = 9 - 18 + 18 = 9. \end{aligned}$$

42.12.\* Кут між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  дорівнює  $120^\circ$ ,  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ . Обчисліть скалярний добуток  $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 7\vec{b})$ .

$$\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ, |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1.$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 7\vec{b}) &= 4|\vec{a}|^2 - 7\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{a} \cdot \vec{b} - 21|\vec{b}|^2 = \\ &= 4|\vec{a}|^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 21|\vec{b}|^2 = 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ - 21 \cdot 1^2 = \\ &= 4 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 21 = -17 - 2,5 = -19,5. \end{aligned}$$

42.14.\* При якому значенні  $x$  вектори  $\vec{a}(x; -x; 1)$  і  $\vec{b}(x; 2; 1)$  перпендикулярні?

$$\vec{a}(x; -x; 1), \vec{b}(x; 2; 1), \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

$$x \cdot x + (-x) \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{array} \right.$$

$$\vec{a}(1; -1; 1), \vec{b}(1; 2; 1).$$

42.16.\* Знайдіть скалярний добуток  $(2\bar{a} - 3\bar{b})(\bar{a} - 2\bar{b})$ , якщо  $\bar{a} (2; -1; -2)$ ,  $\bar{b} (4; -3; 2)$ .

$$(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) = ?, \vec{a} (2; -1; -2), \vec{b} (4; -3; 2).$$

$$(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\vec{b} - 3\vec{a}\vec{b} + 6|\vec{b}|^2 = \\ = 2|\vec{a}|^2 - 7\vec{a}\vec{b} + 6|\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}$$

$$2 \cdot 3^2 - 7(2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) + (-2) \cdot 2) + 6 \cdot (\sqrt{29})^2 = 18 - 7(8 + 3 - 4) + \\ + 6 \cdot 29 = 18 - 49 + 174 = 143$$

**Домашнє завдання:** підготуватись до контрольної роботи, надіслати конспекти з геометрії на перевірку.

**Зворотній зв'язок:**

**E-mail** t.anastasia.igorivna@gmail.com