

22.12.2022

Група 33

Математика (геометрія)

Урок 45-46

Тема: об'єми геометричних тіл. Розв'язування задач

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; прищепити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

### Матеріали до уроку:

**Задача.** Скільки повних порцій супу міститься в каструлі, яка має форму циліндра, висота якого 40 см, а діаметр 0,3 м. Відомо, що одна порція містить 0,25 л супу.



Дано:  $V_{\text{п}} = 0,25 \text{ л} = 250 \text{ см}^3$ ;

$H = 40 \text{ см}$ ;  $R = 15 \text{ см}$ .

Знайти:  $n$  – кількість порцій.

**Розв'язання:**

$$V = \pi R^2 H = 3,14 \cdot 15^2 \cdot 40 = 28260 \text{ (см}^3\text{)}$$

$$n = \frac{28260}{250} = 113,04 \approx 113 \text{ (порцій)}$$

**Відповідь:** 113 порцій.

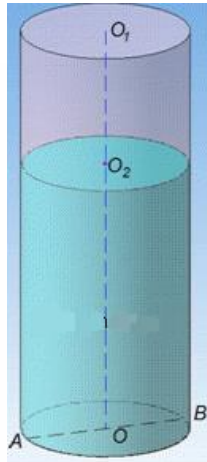
**Задача.** Криниця має форму циліндра, діаметр основи якого дорівнює 1,2 м, а глибина – 3 м. Вона наповнена водою на  $\frac{2}{3}$  глибини. Обчислити з точністю до  $0,01 \text{ м}^3$  об'єм води у криниці.

**Розв'язання.**

В умові задачі сказано, що маємо криницю, яка має форму циліндра.

Зробимо математичну модель задачі: криницю замінимо на циліндр з діаметром основи  $D = 1,2 \text{ м}$ ;

її глибина – це висота циліндра,  $H = 3 \text{ м}$ .



Об'єм води у криниці – це об'єм частини циліндра, який заповнений водою. Об'єм циліндра  $V_1$ , який заповнений водою становить  $\frac{2}{3}$  об'єму заданого циліндра (оскільки об'єм циліндра залежить від висоти лінійно), тобто  $V_1 = \frac{2}{3} \cdot V$ . Об'єм циліндра обчислюється за формулою:  $V = S_{\text{осн}} \cdot H = \pi R^2 H$ , де  $R = D/2 = 0,6$  м – радіус основи і  $H = 3$  м – висота циліндра;  $\pi \sim 3,14$ .

Переходимо до розрахунків

$$V_1 = \frac{2}{3} V = \frac{2}{3} \cdot \pi R^2 H =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (0,6)^2 \cdot 3 = 2 \cdot \pi \cdot 0,36 = 0,72 \pi \approx 2,26 \text{ м}^3$$

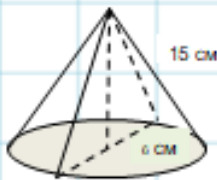
Тобто  $V_1 = 2,26 \text{ м}^3$  – об'єм води у криниці.

Відповідь:  $2,26 \text{ м}^3$ .

**Задача.** Визначте обсяг наповнювача для вафельного ріжка конічної форми, діаметр основи якого 6 см, а твірна 15 см. Скільки літрів наповнювача буде потрібно для приготування 20 таких ріжків ?



Визначити об'єм наповнювача для вафельного ріжка конічної форми, діаметр основи якого 6 см, а твірна – 15 см. Скільки літрів наповнювача потрібно для виготовлення 20 таких ріжків?



**Дано:** Ріжок канонічної форми;

$$d_{\text{осн}} = 6 \text{ см};$$

$$l = 15 \text{ см};$$

$$n = 20 \text{ шт};$$

$n$  – кількість ріжків.

**Знайти:**  $V$  – об'єм наповнювача.

**Розв'язання**

Кількість наповнювача в вафельному ріжку дорівнює його об'єму. Так як ріжок має форму конуса, то його об'єм дорівнює об'єму відповідного конуса.

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

$$\text{За теоремою Піфагора } H^2 = L^2 - R^2 = 15^2 - 3^2 = 225 - 9 = 216.$$

$$H = \sqrt{216} = 14,7 \text{ (см.)}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 3^2 \cdot 14,7 = 138 \text{ (см}^3\text{)}$$

$$138 \cdot 20 = 2760 \text{ (см}^3\text{)} = 2,76 \text{ (л.)}$$

Відповідь: 2,76 л.

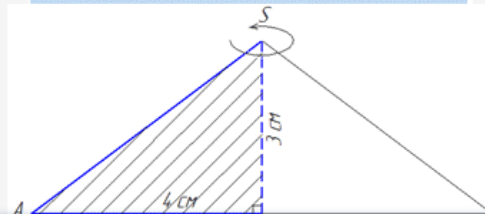
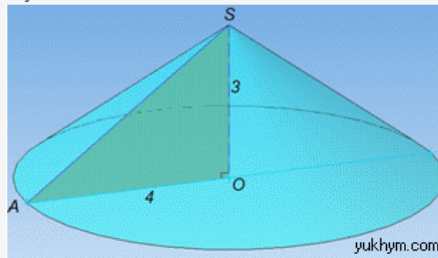


**Задача 39.4** Прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см обертається навколо меншого катета. Обчислити об'єм утвореного тіла обертання.

А	Б	В	Г	Д
16л см <sup>3</sup>	12л см <sup>3</sup>	36л см <sup>3</sup>	48л см <sup>3</sup>	4л см <sup>3</sup>

**Розв'язання:** Маємо прямокутний  $\triangle AOS$  ( $\angle AOS=90^\circ$ ), в якому  $AO=4$  см – більший катет,  $SO=3$  см – менший катет і  $SA$  – гіпотенуза.

Тіло, яке утвориться при обертанні прямокутного  $\triangle AOS$  навколо меншого катета  $SO$  називається конусом.



Вісь (висота) конуса – менший катет прямокутного  $\triangle AOS$  ( $H=SO=3$  см);  
радіус основи конуса – більший катет прямокутного  $\triangle AOS$  ( $R=AO=4$  см), а твірна конуса – гіпотенуза  $SA$  прямокутного  $\triangle AOS$ .

Об'єм конуса обчислюється за формулою:

$$V = \frac{1}{3} S_{oc} H = \frac{1}{3} \pi R^2 H, \text{ де } S_{oc} = \pi R^2 \text{ – площа основи конуса, площа круга.}$$

Ця формула дуже добре вивчається на практичних в 9-10 класі і доступна у самих простих посібниках по фігурах. Все що залишається, це підставити вхідні величини та знайти

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{\pi}{3} \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi \text{ см}^3 \text{ – об'єм конуса, утвореного при обертанні прямокутного } \triangle AOS \text{ навколо катета}$$

$SO=3$  см.

**Відповідь:** 16л см<sup>3</sup> – А.

**Задача 39.30** Знайти об'єм  $V$  тіла, яке утворюється при обертанні ромба зі стороною 1 і гострим кутом  $60^\circ$  навколо меншої діагоналі.

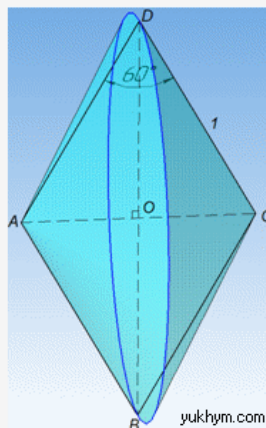
У відповідь записати  $V/\pi$ .

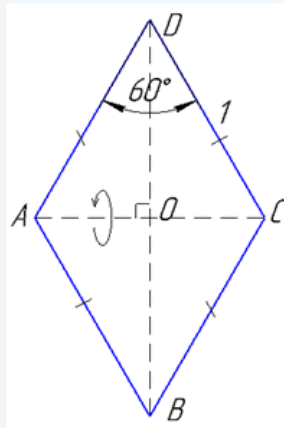
**Розв'язання:** Маємо ромб  $ABCD$ , в якому  $AB=BC=CD=AD=1$  – сторона і  $\angle ADC=\angle ABC=60^\circ$  – гострий кут між сусідніми сторонами;

$AC=1$  – менша діагональ (оскільки  $\triangle ADC$  з кутом  $60^\circ$  є рівностороннім за властивістю ромба),

$BD = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$  – більша діагональ (обчислили як висоту рівностороннього  $\triangle ADC$  зі стороною 1 і помножили на 2 за властивістю діагоналей ромба).

Тіло обертання матиме наступний вигляд





За властивістю діагоналей ромба маємо:

півдіагоналі  $BO = DO = \frac{\sqrt{3}}{2}$  і  $AO = CO = 1/2$ .

Тіло, яке утвориться при обертанні ромба  $ABCD$  навколо меншої діагоналі  $AC$  складається з двох конусів зі спільною основою з центром  $O$ , де  $R = BO = DO$  є радіусом основи конусів;

$H = AO$  і  $H = CO$  є висотами конусів, оскільки діагоналі ромба перпендикулярні (за властивістю).

Звідси слідує, що ці два конуси рівні, а тому їх об'єми також рівні.

Отримали:

$R = BO = DO = \frac{\sqrt{3}}{2}$  – радіус основи

та  $H = AO = CO = 1/2$  – висоту конуса.

Об'єм конуса знаходимо за відомою формулою:

$$V = \frac{1}{3} S_{ос} H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

де  $R$  – радіус основи і  $H$  – висота конуса.

Підставляємо та обчислюємо об'єм утвореного тіла обертання:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{2}{3} \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} = 0,25\pi$$

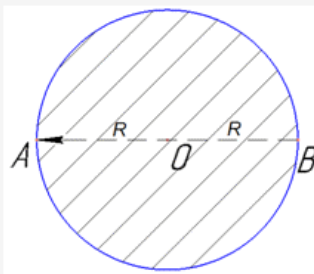
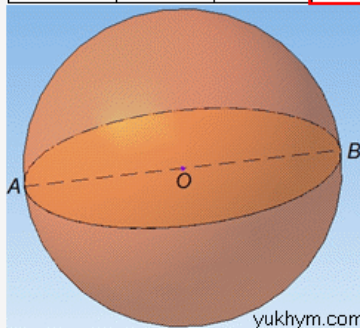
$V/\pi = 0,25$ .

Відповідь: 0,25.

**Задача 40.3** Площа великого круга кулі дорівнює  $4\pi \text{ см}^2$ .

Знайти об'єм кулі.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{64}{3} \pi \text{ см}^3$	$16\pi \text{ см}^3$	$32\pi \text{ см}^3$	$\frac{32}{3} \pi \text{ см}^3$	$64\pi \text{ см}^3$



**Розв'язання:** Об'єм кулі обчислюють за формулою:

$V = \frac{4}{3} \pi R^3$ , де  $R$  – радіус кулі.

Маємо кулю з центром в точці  $O$  і діаметром  $AB = D = 2R$ .

Великий круг кулі – це круг, у якого центр співпадає з центром кулі, а радіус (діаметр) великого круга дорівнює радіусу (діаметру) кулі.

**Площу круга** запишемо формулою:

$S = \pi R^2 = 4\pi$  см<sup>2</sup>, звідси  $\pi R^2 = 4\pi$ ,  $R^2 = 4$ , отже  $R = 2$  см – радіус великого круга, тобто радіус кулі.

**Об'єм кулі через радіус рівний:**

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 8 = \frac{32}{3} \pi \text{ см}^3$$

Це сама поширена формула кулі, тому добре її запам'ятайте.

**Відповідь:**  $\frac{32}{3}\pi$  см<sup>3</sup> – Г.

### **Домашня робота:**

Записати задачі

Підготуватись до к/р – повторити формули об'ємів многогранників та тіл обертання (призма, піраміда, конус, циліндр, куля)

### **Зворотній зв'язок**

**Е-mail** [vitasergiivna1992@gmail.com](mailto:vitasergiivna1992@gmail.com)

**!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.**