23.12.2022

Група 25

Математика (геометрія)

Урок 17-18

Тема: Скалярний добуток векторів

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Нехай $\overline{a}$ і $\overline{b}$ — два ненульових і неспівнапрямлених вектори. Від довільної точки O відкладемо вектори $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$, що дорівнюють відповідно векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (рис. 42.1). Величину кута AOB називатимемо **кутом між векторами** $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ позначають так: $\angle(\overline{a}, \overline{b})$. Очевидно, що коли $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$, то $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 180°$ (рис. 42.2).

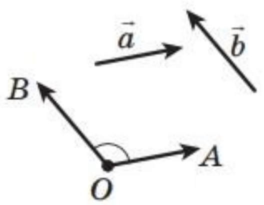

Рис. 42.1

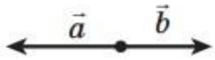

Рис. 42.2

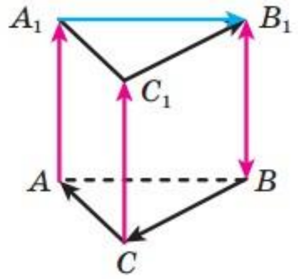

Рис. 42.3

Якщо $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, то вважають, що $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 0°$. Якщо хоча б один із векторів $\overline{a}$ або $\overline{b}$ нульовий, то також вважають, що $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 0°$.

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°. Записують: $\overline{a} \perp \overline{b}$.

На рисунку 42.3 зображено трикутну призму, основою якої є правильний трикутник, а бічне ребро перпендикулярне до площини основи.

Маємо: $\angle(\overline{CA}, \overline{C_1B_1}) = 60°$, $\angle(\overline{BC}, \overline{A_1B_1}) = 120°$, $\angle(\overline{AA_1}, \overline{BB_1}) = 0°$, $\angle(\overline{AA_1}, \overline{BC}) = 90°$, $\angle(\overline{CC_1}, \overline{B_1B}) = 180°$.

Означення. Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Маємо: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то очевидно, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називають **скалярним квадратом** вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}^2$.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Теорема 42.1. ***Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.***

Наприклад, для векторів, зображених на рисунку 42.3, маємо: $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 0$.

Теорема 42.2. ***Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Теорема 42.3. ***Косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$

Деякі властивості скалярного добутку векторів аналогічні відповідним властивостям добутку чисел. Наприклад,

для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і будь-якого числа k є справедливими рівності:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b});$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

42.3.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30°$;

2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$.

1) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 30^\circ$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a};\vec{b})$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\sqrt{3}\cdot 5\cdot\cos 30^\circ = \overset{5}{\cancel{10}}\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 5\cdot 3 = 15.$

2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 135^\circ$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 7\cdot\cos 135^\circ = 4\cdot 7\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{28\sqrt{2}}{2} = -14\sqrt{2}.$

42.5.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:

1) $\overline{a}$ (1; −2; 3), $\overline{b}$ (2; −4; 3); 2) $\overline{a}$ (−9; 4; 5), $\overline{b}$ (3; −1; 4).

1) $\vec{a}(4;-1;3)$, $\vec{b}(2;-4;3)$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 2 + (-1)\cdot(-4) + 3\cdot 3 = 8 + 4 + 9 = 21$

2) $\vec{a}(-9;4;5)$, $\vec{b}(3;-1;4)$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -9\cdot 3 + 4\cdot(-1) + 5\cdot 4 = -27 - 4 + 20 = -11$

42.7.° Дано вектори $\overline{m}$ (3; −2; 4) і $\overline{n}$ (2; 2; z). При якому значенні z виконується рівність $\overline{m}\cdot\overline{n} = 18$?

$\vec{m}(3;-2;4)$, $\vec{n}(2;2;z)$, $\vec{m}\cdot\vec{n} = 18$, z − ?

$3\cdot 2 + (-2)\cdot 2 + 4z = 18$

$6 - 4 + 4z = 18$

$2 + 4z = 18$

$4z = 18 - 2$

$4z = 16$

$z = \frac{16}{4}$

$z = 4$

42.9.° Серед векторів $\overline{a}$ (1; 1; 2), $\overline{b}$ (1; 2; 1) і $\overline{c}$ (−5; 3; 1) укажіть пару перпендикулярних векторів.

$\vec{a}(1;1;2)$, $\vec{b}(1;2;1)$, $\vec{c}(-5;3;1)$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 1 + 2 + 2 = 5$

$\vec{b}\cdot\vec{c} = 1\cdot(-5) + 2\cdot 3 + 1\cdot 1 = -5 + 6 + 1 = 2$

$\vec{a}\cdot\vec{c} = 1\cdot(-5) + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 = -5 + 3 + 2 = 0$ − перпендикулярні.

42.10.* Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 45°, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$. Знайдіть:

1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$; 2) $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}$; 3) $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

$\angle(\vec{a};\vec{b}) = 45°$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$.

$1)\ (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a};\vec{b}) + |\vec{b}|^2 =$
$= 3\cdot3\sqrt{2}\cdot\cos45° + (3\sqrt{2})^2 = 9\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 9\cdot2 = \frac{9\cdot2}{2} + \frac{18^{\backslash 2}}{1} =$
$= \frac{18+36}{2} = \frac{54}{2} = 27.$

$2)\ (2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a} = 2\vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{a} = 2\cdot|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\angle(\vec{b};\vec{a}) =$
$= 2\cdot3^2 - 3\sqrt{2}\cdot3\cdot\cos45° = 18 - 9\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{18^{\backslash 2}}{1} - \frac{18}{2} = \frac{36-18}{2} = 9.$

$3)\ (\vec{a}-\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3^2 - 2\cdot3\cdot3\sqrt{2}\cdot\cos45° + (3\sqrt{2})^2 =$
$= 9 - \cancel{18}^{9}\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} + 9\cdot2 = 9 - 18 + 18 = 9.$

42.12.* Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 120°, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Обчисліть скалярний добуток $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(4\vec{a}-7\vec{b})$.

$\angle(\vec{a};\vec{b}) = 120°$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.

$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(4\vec{a}-7\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 - 7\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{a}\vec{b} - 21|\vec{b}|^2 =$
$= 4|\vec{a}|^2 + 5\vec{a}\vec{b} - 21|\vec{b}|^2 = 4\cdot1^2 + 5\cdot1\cdot1\cdot\cos120° - 21\cdot1^2 =$
$= 4 + 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 21 = -17 - 2{,}5 = -19{,}5.$

42.14.* При якому значенні x вектори $\vec{a}\,(x; -x; 1)$ і $\vec{b}\,(x; 2; 1)$ перпендикулярні?

$\vec{a}\,(x; -x; 1)$, $\vec{b}\,(x; 2; 1)$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$

$x\cdot x + (-x)\cdot2 + 1\cdot1 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1x_2 = 1 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{array}$

$\vec{a}\,(1; -1; 1)$, $\vec{b}\,(1; 2; 1)$.

42.16.• Знайдіть скалярний добуток $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$, якщо $\vec{a}\,(2; -1; -2)$, $\vec{b}\,(4; -3; 2)$.

$(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) - ?$, $\vec{a}\,(2; -1; -2)$, $\vec{b}\,(4; -3; 2)$.

$$(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\vec{b} - 3\vec{a}\vec{b} + 6|\vec{b}|^2 =$$

$$= 2|\vec{a}|^2 - 7\vec{a}\vec{b} + 6|\vec{b}|^2.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}.$$

$$2 \cdot 3^2 - 7(2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) + (-2) \cdot 2) + 6 \cdot (\sqrt{29})^2 = 18 - 7(8 + 3 - 4) +$$

$$+ 6 \cdot 29 = 18 - 49 + 174 = 143$$

Домашнє завдання: підготуватись до контрольної роботи, надіслати конспекти з геометрії та з алгебри на перевірку.

Зворотній зв'язок:
E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com