

23.12.2022

Група 26

Математика (алгебра)

Урок 23-24

Тема: Показникові рівняння

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

$$\begin{aligned} \text{Розглянемо рівняння } 2^x &= 8, \\ 3^x \cdot 3^{x-1} &= 4, \\ 0,3^{x-4} &= 0,3^{x^2}. \end{aligned}$$

У цих рівняннях змінна міститься тільки в показнику степеня. Наведені рівняння є прикладами показникових рівнянь.

Теорема 2.1. При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.

Доведення. Очевидно, що коли $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Доведемо, що з рівності $a^{x_1} = a^{x_2}$ випливає рівність $x_1 = x_2$.

Припустимо, що $x_1 \neq x_2$, тобто $x_1 < x_2$ або $x_1 > x_2$. Нехай, наприклад, $x_1 < x_2$.

Розглянемо показникову функцію $y = a^x$. Вона є або зростаючою, або спадною. Тоді з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $a^{x_1} < a^{x_2}$ (при $a > 1$) або $a^{x_1} > a^{x_2}$ (при $0 < a < 1$). Проте за умовою виконується рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$. Отримали суперечність.

Аналогічно, розглядаючи випадок, коли $x_1 > x_2$, можна отримати суперечність. Отже, $x_1 = x_2$. ◀

Наслідок. Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x).$$

Розглянемо приклади розв'язування показникових рівнянь.

Задача 1. Розв'яжіть рівняння $2^x = 8$.

Розв'язання. Подамо кожен із частин рівняння у вигляді степеня з основою 2. Маємо:

$$2^x = 2^3.$$

Звідси $x = 3$.

Відповідь: 3. ◀

Задача 2. Розв'яжіть рівняння $3^{2x+1} + 9^x = 36$.

Розв'язання. Маємо: $3^{2x+1} + (3^2)^x = 36$; $3^{2x+1} + 3^{2x} = 36$.

Винесемо множник 3^{2x} за дужки: $3^{2x}(3^1 + 1) = 36$.

Далі отримуємо: $3^{2x} \cdot 4 = 36$; $3^{2x} = 9$; $3^{2x} = 3^2$; $2x = 2$; $x = 1$.

Відповідь: 1. ◀

Задача 3. Розв'яжіть рівняння $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$, то дане рівняння зручно розв'язувати методом заміни змінної.

Нехай $5^x = t$. Тоді задане рівняння можна переписати так:

$$t^2 + 4t - 5 = 0.$$

Звідси $t = 1$ або $t = -5$.

Якщо $t = 1$, то $5^x = 1$. Звідси $5^x = 5^0$; $x = 0$.

Якщо $t = -5$, то $5^x = -5$. Оскільки $5^x > 0$ при будь-якому x , то рівняння $5^x = -5$ не має коренів.

Відповідь: 0. ◀

Задача 4. Розв'яжіть рівняння $9 \cdot 5^x = 25 \cdot 3^x$.

Розв'язання. Маємо: $3^2 \cdot 5^x = 5^2 \cdot 3^x$. Звідси $\frac{5^x}{3^x} = \frac{5^2}{3^2}$; $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^2$;

$x = 2$.

Відповідь: 2. ◀

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням

<https://forms.gle/xgpeNBZQX1UHcGgB7>.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com