

26.12.2022

Група 15

Математика (алгебра)

Урок 24-25

Тема: Формули зведення

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

### Матеріали до уроку:

Періодичність тригонометричних функцій дає змогу зводити обчислення значень синуса та косинуса до випадку, коли значення аргументу належить проміжку  $[0; 2\pi]$ . У цьому пункті ми розглянемо формули, які дають можливість у таких обчисленнях обмежитися лише кутами з проміжку  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Кожний кут із проміжку  $[0; 2\pi]$  можна подати у вигляді  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ , або  $\pi \pm \alpha$ , або  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ , де  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . Наприклад,  $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ .

Обчислення синусів і косинусів кутів виду  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ,  $\pi \pm \alpha$ ,  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$  можна звести до обчислення синуса або косинуса кута  $\alpha$ . Наприклад:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2} \sin\alpha = -\sin\alpha.$$

Застосовуючи формули додавання, аналогічно можна отримати:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$

Ці формули називають формулами зведення для синуса.

Наведені нижче формули називають формулами зведення для косинуса:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha & \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= \sin \alpha \end{aligned}$$

Проаналізувавши записані формули зведення, можна помітити закономірності, завдяки яким необов'язково заучувати ці формули.

Для того щоб записати будь-яку з них, можна керуватися такими правилами.

1. У правій частині рівності ставлять той знак, який має ліва частина за умови, що  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

2. Якщо в лівій частині формули аргумент має вигляд  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$  або  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ , то синус замінюють на косинус і навпаки. Якщо аргумент має вигляд  $\pi \pm \alpha$ , то заміни функції не відбувається.

Покажемо, як застосувати ці правила для виразу  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ .

Припустивши, що  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , доходимо висновку:  $\frac{3\pi}{2} - \alpha$  є кутом

III координатної чверті. Тоді  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$ . За першим правилом у правій частині рівності має стояти знак «-».

Оскільки аргумент має вигляд  $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ , то за другим правилом потрібно замінити синус на косинус.

Отже,  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$ .

158. Зведіть до тригонометричної функції кута  $\alpha$ :

- |   |   |   |
|---|---|---|
| 1) $\sin(\pi - \alpha)$ ;                       | 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ ; | 5) $\sin^2\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$ ; |
| 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ ; | 4) $\operatorname{ctg}(\alpha - \pi)$ ;                     | 6) $\cos^2(360^\circ - \alpha)$ .                 |

$$1) \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$2) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha;$$

$$3) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$4) \operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \operatorname{ctg}(-\pi + \alpha) = -\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \\ = -\frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

159. Зведіть до значення тригонометричної функції додатного аргументу, меншого від  $45^\circ$  (або  $\frac{\pi}{4}$ ):

$$1) \cos 127^\circ;$$

$$5) \cos 400^\circ;$$

$$9) \sin 1916^\circ;$$

$$2) \operatorname{tg} 172^\circ;$$

$$6) \operatorname{tg}(-298^\circ);$$

$$10) \cos 3000^\circ;$$

$$3) \sin 219^\circ;$$

$$7) \cos 1,2\pi;$$

$$11) \operatorname{tg} 4,3\pi;$$

$$4) \operatorname{ctg} 194^\circ;$$

$$8) \sin \frac{5\pi}{9};$$

$$12) \operatorname{ctg} \frac{21\pi}{8}.$$

$$1) \cos 127^\circ = \cos(90^\circ + 37^\circ) = -\sin 37^\circ;$$

$$2) \operatorname{tg} 172^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 8^\circ) = \frac{\sin(180^\circ - 8^\circ)}{\cos(180^\circ - 8^\circ)} = \frac{\sin 8^\circ}{-\cos 8^\circ} = -\operatorname{tg} 8^\circ;$$

$$3) \sin 219^\circ = \sin(180^\circ + 39^\circ) = -\sin 39^\circ.$$

$$4) \operatorname{ctg} 194^\circ = \frac{\cos 194^\circ}{\sin 194^\circ} = \frac{\cos(180^\circ + 14^\circ)}{\sin(180^\circ + 14^\circ)} = \frac{-\cos 14^\circ}{-\sin 14^\circ} = \operatorname{ctg} 14^\circ;$$

$$5) \cos 400^\circ = \cos(270^\circ + 130^\circ) = \sin 130^\circ = \sin(90^\circ + 40^\circ) = \\ = \cos 40^\circ;$$

$$7) \cos 1,2\pi = \cos(\pi + 0,2\pi) = -\cos \frac{\pi}{5};$$

$$8) \sin \frac{5\pi}{9} = \sin\left(\frac{5\pi}{9} \cdot \frac{180}{\pi}\right) = \sin 100^\circ = \sin(90^\circ + 10^\circ) = \cos 10^\circ;$$

$$9) \sin 1916^\circ = \sin(360^\circ \cdot 5 + 116^\circ) = \sin 116^\circ = \sin(90^\circ + 26^\circ) = \\ = \cos 26^\circ;$$

$$10) \cos 3000^\circ = \cos(360^\circ \cdot 8 + 120^\circ) = \cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = \\ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$11) \operatorname{tg} 4,3\pi = \frac{\sin 4,3\pi}{\cos 4,3\pi} = \frac{\sin\left(4,3\pi \cdot \frac{180}{\pi}\right)}{\cos\left(4,3\pi \cdot \frac{180}{\pi}\right)} = \frac{\sin 774^\circ}{\cos 774^\circ} = \frac{\sin(360^\circ \cdot 2 + 54^\circ)}{\cos(360^\circ \cdot 2 + 54^\circ)} = \\ = \frac{\sin 54^\circ}{\cos 54^\circ} = \frac{\sin(90^\circ - 36^\circ)}{\cos(90^\circ - 36^\circ)} = \frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} = \operatorname{ctg} 36^\circ.$$

160. Обчисліть:

1)  $\sin 120^\circ$ ;

4)  $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ ;

7)  $\sin 1110^\circ$ ;

2)  $\cos 225^\circ$ ;

5)  $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}$ ;

8)  $\cos\frac{74\pi}{3}$ ;

3)  $\operatorname{tg}(-240^\circ)$ ;

6)  $\cos 10\pi$ ;

9)  $\operatorname{ctg}\left(-\frac{20\pi}{3}\right)$ .

1)  $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

2)  $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

3)  $\operatorname{tg} 240^\circ = \operatorname{tg}(270^\circ - 30^\circ) = \frac{\sin(270^\circ - 30^\circ)}{\cos(270^\circ - 30^\circ)} = \frac{-\cos 30^\circ}{-\sin 30^\circ} = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$ ;

5)  $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6} = \operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) = \operatorname{ctg} 330^\circ = \frac{\cos(270^\circ + 60^\circ)}{\sin(270^\circ + 60^\circ)} = \frac{\cos 60^\circ}{-\sin 60^\circ} = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

4)  $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) = \cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

6)  $\cos 10\pi = \cos\left(10\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) = \cos 1800^\circ = \cos(360^\circ \cdot 5 + 0^\circ) = \cos 0^\circ = 1$ ;

7)  $\sin 1110^\circ = \sin(360^\circ \cdot 3 + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ;

8)  $\cos\frac{74\pi}{3} = \cos\left(\frac{74\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) = \cos 4440^\circ = \cos(560^\circ \cdot 12 + 120^\circ) = \cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ ;

9)  $\operatorname{ctg}\frac{20\pi}{3} = \operatorname{ctg}\left(\frac{20\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) = \operatorname{ctg} 1200^\circ = \operatorname{ctg}(560^\circ \cdot 3 + 120^\circ) = \frac{\cos 120^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{\cos(90^\circ + 30^\circ)}{\sin(90^\circ + 30^\circ)} = \frac{-\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\operatorname{tg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

161. Знайдіть значення виразу:

1)  $3\operatorname{ctg}135^\circ + 2\cos 120^\circ + \operatorname{tg}420^\circ + 2\sin 300^\circ$ ;

2)  $\sin\frac{7\pi}{4} \cos\frac{7\pi}{6} \operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right) \operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$ ;

3)  $\operatorname{tg}41^\circ \operatorname{tg}42^\circ \operatorname{tg}43^\circ \dots \operatorname{tg}49^\circ$ ;

4)  $\sin 200^\circ \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cos 50^\circ$ .

$$\begin{aligned}
 1) \quad & 3 \operatorname{ctg} 135^\circ + 2 \cos 120^\circ + \operatorname{tg} 420^\circ + 2 \sin 300^\circ = 3 \cdot \frac{\cos(90^\circ+45^\circ)}{\sin(90^\circ+45^\circ)} + \\
 & + 2 \cos(90^\circ+30^\circ) + \frac{\sin(360^\circ+60^\circ)}{\cos(360^\circ+60^\circ)} + 2 \cdot \sin(270^\circ+30^\circ) = 3 \cdot \frac{-\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} + \\
 & + 2 \cdot (-\sin 30^\circ) + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} + 2 \cdot (-\cos 30^\circ) = 3 \cdot (-\operatorname{tg} 45^\circ) - 2 \sin 30^\circ + \\
 & + \operatorname{tg} 60^\circ - 2 \cos 30^\circ = -3 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3 - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = \\
 & = -4;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \sin \frac{7\pi}{4} \cos \frac{7\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} \operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3} = \sin 315^\circ \cdot \cos 210^\circ \cdot \operatorname{tg} 300^\circ \cdot \operatorname{ctg} 240^\circ = \\
 & = \sin(270^\circ+45^\circ) \cdot \cos(270^\circ-60^\circ) \cdot \frac{\sin(270^\circ+30^\circ)}{\cos(270^\circ+30^\circ)} \cdot \\
 & \cdot \frac{\cos(270^\circ-30^\circ)}{\sin(270^\circ-30^\circ)} = -\cos 45^\circ \cdot (-\sin 60^\circ) \cdot \frac{-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot \\
 & \cdot \frac{-\sin 30^\circ}{-\cos 30^\circ} = \cos 45^\circ \sin 60^\circ \cdot (-\operatorname{ctg} 30^\circ) \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \\
 & = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{(\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{6}}{6} = \\
 & = -\frac{3\sqrt{6}}{6} = -\frac{\sqrt{6}}{2}
 \end{aligned}$$

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням  
<https://forms.gle/BYXp3pPWh6uwZ3u9A>.

Зворотній зв'язок:

E-mail [t.anastasia.igorivna@gmail.com](mailto:t.anastasia.igorivna@gmail.com)