**26.12.2022**

**Група 16**

**Математика (алгебра)**

**Урок 26-27**

**Тема:** Графіки тригонометричних функцій

**Мета:**

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

**Матеріали до уроку:**

Ви знаєте, що для будь-якого числа $x$ виконуються рівності

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi);$$

$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

Це означає, що значення функцій синус і косинус періодично повторюються при зміні аргументу на $2\pi$. Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є прикладами **періодичних функцій**.

**Означення.** **Функцію $f$ називають періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого $x$ із області визначення функції $f$ виконуються рівності**

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

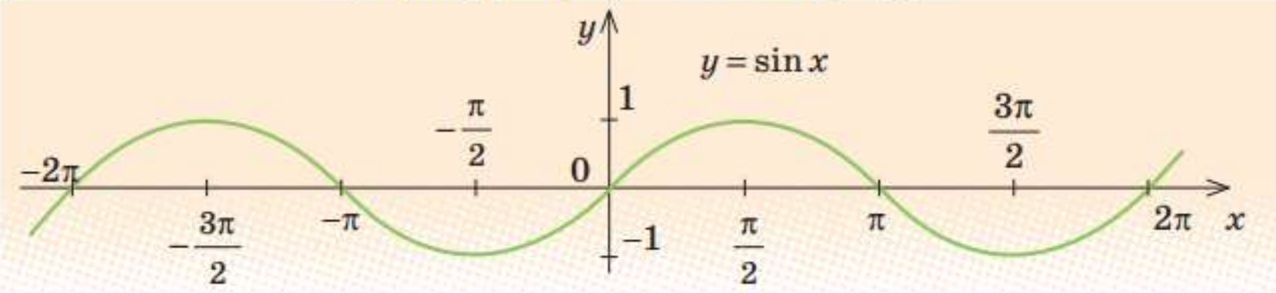
**Число $T$ називають періодом функції $f$.**

Можна показати, що *коли функція $f$ має період $T$, то будь-яке із чисел $2T$, $3T$, ..., а також будь-яке із чисел $-T$, $-2T$, $-3T$, ... також є її періодом.*

Якщо серед усіх періодів функції $f$ існує найменший додатний період, то його називають **головним періодом** функції $f$.

**Теорема 11.1.** ***Головним періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є число $2\pi$; головним періодом функції $y = \mathrm{tg}\, x$ є число $\pi$.***

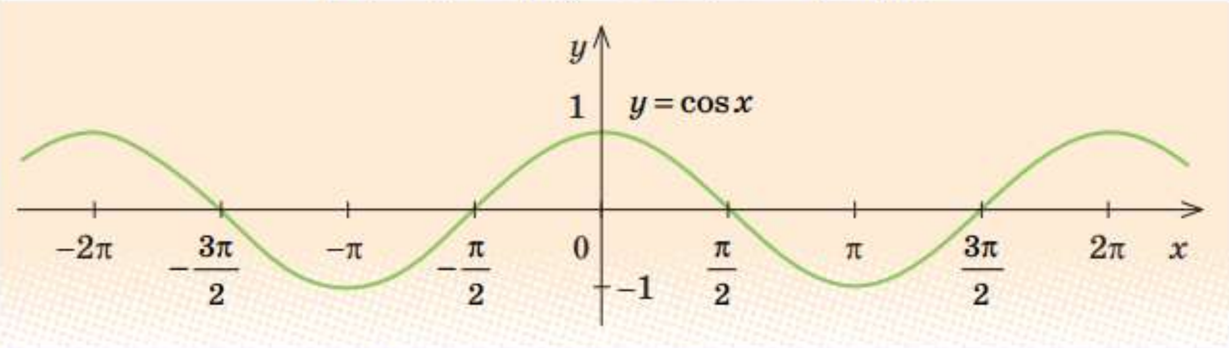
## Графік функції $y=\sin x$ (синусоїда)




## Властивості функції $y=\sin x$

1. *Область визначення*: $x\in \boldsymbol{R}$ ($x$ — будь-яке дійсне число). $\boxed{D(\sin x)=\boldsymbol{R}}$
2. *Область значень*: $y\in[-1;1]$. $\boxed{E(\sin x)=[-1;1]}$
3. Функція **непарна**: $\sin(-x)=-\sin x$ (графік симетричний відносно початку координат).
4. *Функція періодична* з періодом $\boxed{T=2\pi}$: $\sin(x+2\pi)=\sin x$.
5. *Точки перетину з осями координат*: $Oy$ $\boxed{\begin{cases}x=0,\\ y=0;\end{cases}}$ $Ox$ $\boxed{\begin{cases}y=0,\\ x=\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.\end{cases}}$
6. *Проміжки знакосталості*:
   $\sin x>0$ при $x\in(2\pi k;\pi+2\pi k)$, $k\in \boldsymbol{Z}$; $\sin x<0$ при $x\in(\pi+2\pi k;2\pi+2\pi k)$, $k\in \boldsymbol{Z}$.
7. *Проміжки зростання і спадання*:
   функція $\sin x$ **зростає на кожному з проміжків** $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$,
   і **спадає на кожному з проміжків** $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$.
8. **Найбільше значення** функції дорівнює 1 при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.
   **Найменше значення** функції дорівнює –1 при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

## Графік функції $y=\cos x$ (косинусоїда)




## Властивості функції $y=\cos x$

1. *Область визначення*: $x\in \boldsymbol{R}$ ($x$ — будь-яке дійсне число).

$$\boxed{D(\cos x)=\boldsymbol{R}}$$

2. *Область значень*: $y\in[-1;1]$. $\boxed{E=(\cos x)=[-1;1]}$

3. *Функція* ***парна***: $\cos(-x)=\cos x$ (графік симетричний відносно осі $Oy$).

4. *Функція періодична з періодом* $\boxed{T=2\pi}$: $\cos(x+2\pi)=\cos x$.

5. *Точки перетину з осями координат*: $Oy$ $\boxed{\begin{cases}x=0,\\ y=1;\end{cases}}$ $Ox$ $\boxed{\begin{cases}y=0,\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.\end{cases}}$

6. *Проміжки знакосталості*:

$$\cos x>0 \text{ **при** } x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in \boldsymbol{Z};$$

$$\cos x<0 \text{ **при** } x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

7. *Проміжки зростання і спадання*:

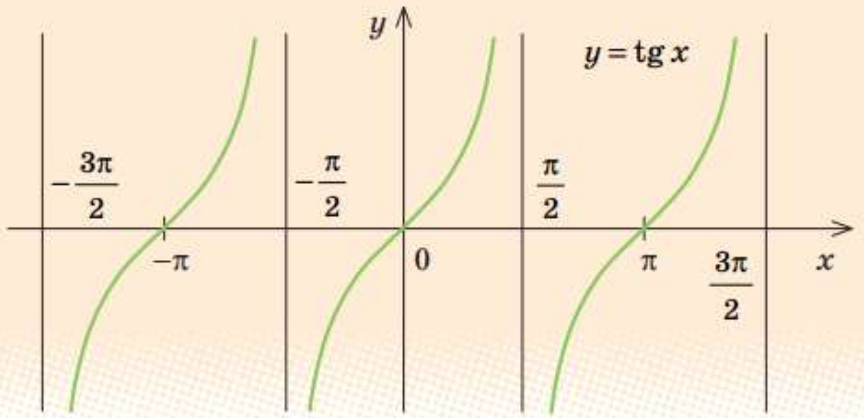
функція $\cos x$ **зростає на кожному з проміжків** $[\pi+2\pi k;2\pi+2\pi k]$, $k\in \boldsymbol{Z}$,

і **спадає на кожному з проміжків** $[2\pi k;\pi+2\pi k]$, $k\in \boldsymbol{Z}$

8. **Найбільше значення** функції дорівнює 1 при $x=2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

**Найменше значення** функції дорівнює –1 при $x=\pi+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$

## Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ (тангенсоїда)




## Властивості функції $y = \operatorname{tg} x$

1. *Область визначення*:

$$D(\operatorname{tg} x):\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

2. *Область значень*: $y \in \mathbf{R}$. $\boxed{E(\operatorname{tg} x) = \mathbf{R}}$.

3. *Функція* ***непарна***: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ (*графік симетричний відносно початку координат*).

4. *Функція періодична* з періодом $\boxed{T = \pi}$: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$.

5. *Точки перетину з осями координат*: $Oy$ $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}}$ $Ox$ $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}}$

6. *Проміжки знакосталості*:

$$\operatorname{tg} x > 0 \text{ при } x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \mathbf{Z};$$

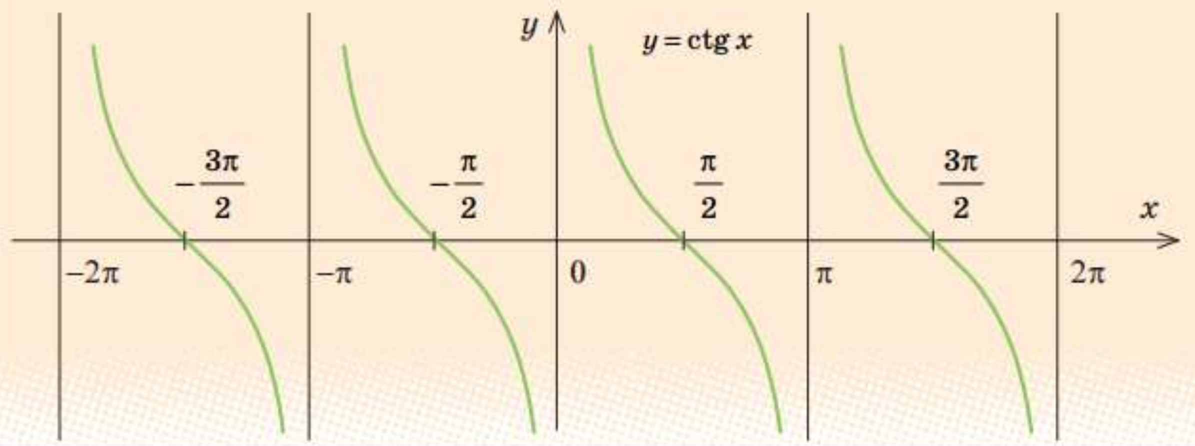
$$\operatorname{tg} x < 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right),\ k \in \mathbf{Z}.$$

7. *Проміжки зростання і спадання*:

   функція $\operatorname{tg} x$ **зростає на кожному з проміжків своєї області визначення**, тобто на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

8. ***Найбільшого і найменшого значень функція не має.***

## Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ (котангенсоїда)




## Властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$

1. *Область визначення*:

$$D(\operatorname{ctg} x):\ x \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2. *Область значень*: $y \in R$. $\boxed{E(\operatorname{ctg} x) = \boldsymbol{R}}$.
3. *Функція* ***непарна***: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ *(графік симетричний відносно початку координат).*
4. *Функція періодична з періодом* $\boxed{T = \pi}$: $\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$.
5. *Точки перетину з осями координат*: $Oy$ **немає**, $Ox$ $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}}$
6. *Проміжки знакосталості*:

$$\operatorname{ctg} x > 0 \text{ при } x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z},$$

$$\operatorname{ctg} x < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

7. *Проміжки зростання і спадання:*
   функція $\operatorname{ctg} x$ **спадає на кожному з проміжків** своєї області визначення, тобто на кожному з проміжків $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
8. ***Найбільшого і найменшого значень функція не має.***

## ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

**Приклад 1.** Побудуйте графік функції та вкажіть нулі функції і проміжки знакосталості функції:

1) $y=2\sin x$; 2) $y=\sin 2x$.

Коментар

Графіки всіх заданих функцій можна одержати за допомогою геометричних перетворень графіка функції $f(x)=\sin x$. Отже, графіком кожної із цих функцій буде синусоїда, одержана:

1) $y=2\sin x=2f(x)$ розтягуванням графіка $y=\sin x$ удвічі вздовж осі $Oy$;

2) $y=\sin 2x=f(2x)$ стискуванням графіка $y=\sin x$ удвічі вздовж осі $Ox$.

Нулі функції — це абсциси точок перетину графіка з віссю $Ox$.

Щоб записати проміжки знакосталості функції, зазначимо, що функція $y=2\sin x$ періодична з періодом $T=2\pi$, а функція $y=\sin 2x$ періодична з періодом $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Тому для кожної функції достатньо з'ясувати на одному періоді, де значення функції додатні (графік розташований вище осі $Ox$) і де від'ємні (графік розташований нижче осі $Ox$), а потім одержані проміжки повторити через період.

Розв'язання

1) Графік функції $y=2\sin x$ одержуємо із графіка функції $y=\sin x$ розтягуванням його вдвічі вздовж осі $Oy$ (рис. 9.4.1).

Нулі функції: $x=\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$.

Проміжки знакосталості:

$2\sin x>0$ при $x\in(2\pi k;\pi+2\pi k)$, $k\in \mathbf{Z}$;

$2\sin x<0$ при $x\in(\pi+2\pi k;2\pi+2\pi k)$, $k\in \mathbf{Z}$. ■

Рис. 9.4.1

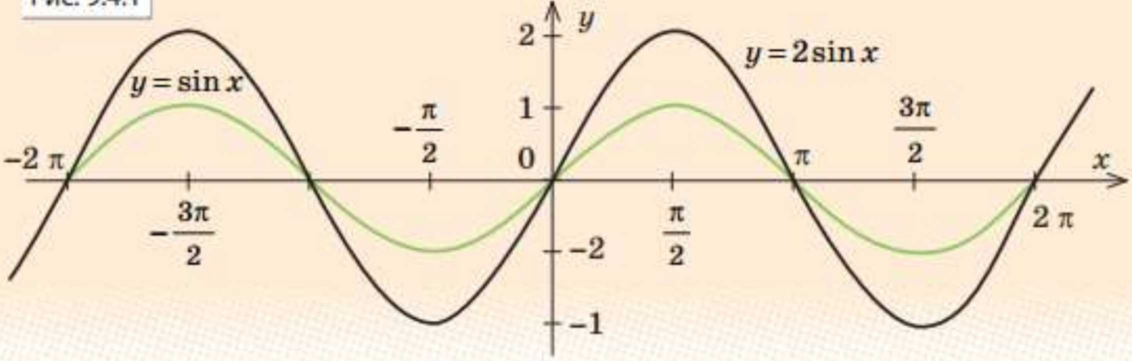
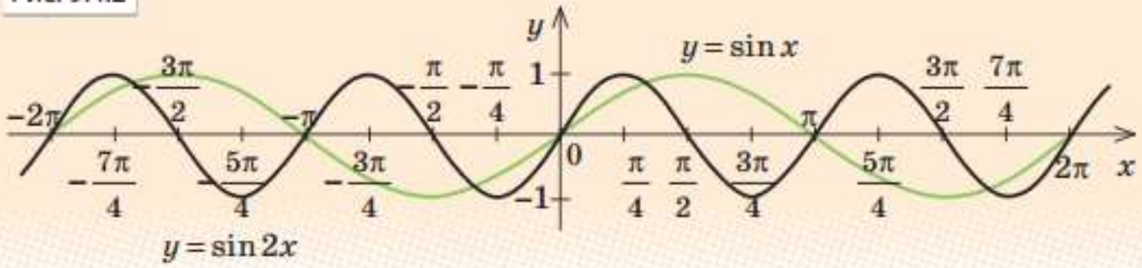


Рис. 9.4.2




2) ▸ Графік функції $y = \sin 2x$ одержуємо із графіка функції $y = \sin x$ стискуванням його вдвічі вздовж осі $Ox$ (рис. 9.4.2).

Нулі функції: $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проміжки знакосталості:

$\sin 2x > 0$ при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\sin 2x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi; \pi + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ■

**Приклад 2.** Розташуйте в порядку зростання числа: $\sin 1{,}9$; $\sin 3$; $\sin(-1)$; $\sin(-1{,}5)$.

Коментар

Для того щоб розмістити задані числа в порядку їх зростання, з'ясуємо, які з них додатні, а які — від'ємні, а потім порівняємо між собою окремо додатні числа і окремо від'ємні, користуючись відомими проміжками зростання і спадання функції $\sin x$.

Розв'язання

▸ Числа $\sin 1{,}9$ і $\sin 3$ додатні (точки $P_{1,9}$ і $P_3$ розташовані в II чверті), а числа $\sin(-1)$ і $\sin(-1{,}5)$ від'ємні ($P_{-1}$ і $P_{-1,5}$ розташовані в IV чверті).

Ураховуючи, що $\frac{\pi}{2} < 1{,}9 < \pi$, $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ і що функція $\sin x$ спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, з нерівності $1{,}9 < 3$ одержуємо $\sin 1{,}9 > \sin 3$.

Також $-\frac{\pi}{2} < -1 < 0$, $-\frac{\pi}{2} < -1{,}5 < 0$. Функція $\sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ зростає.

Ураховуючи, що $-1 > -1{,}5$, одержуємо $\sin(-1) > \sin(-1{,}5)$. Отже, у порядку зростання ці числа розташовуються так: $\sin(-1{,}5)$; $\sin(-1)$; $\sin 3$; $\sin 1{,}9$. ■

**Домашнє завдання:** законспектувати, надіслати конспекти на перевірку на пошту.


**Зворотній зв'язок:**

**E-mail** t.anastasia.igorivna@gmail.com