

29.12.2022

Група 26

Математика (геометрія)

Урок 23-24

Тема: Паралелепіпед

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

**Означення.** Паралелепіпедом називають призму, основи якої є паралелограмами.

На рисунку 17.1 зображено паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Будь-яка грань паралелепіпеда є паралелограмом.

Дві несусідні грані паралелепіпеда називають **протилежними гранями паралелепіпеда**. Наприклад, на рисунку 17.1 грані  $AA_1 B_1 B$  і  $DD_1 C_1 C$  є протилежними.

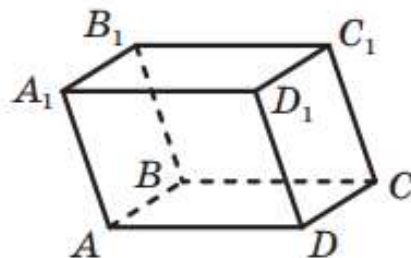


Рис. 17.1

Оскільки  $AA_1 \parallel DD_1$  і  $A_1B_1 \parallel D_1C_1$  (рис. 17.1), то за ознакою паралельності площин  $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$ . Міркуючи аналогічно, можна довести, що *будь-які дві протилежні грані паралелепіпеда лежать у паралельних площинах*.

Паралелепіпед називають **прямим**, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи. У прямого паралелепіпеда всі бічні грані є прямокутниками, а основи — паралелограмами.

Прямий паралелепіпед називають **прямокутним**, якщо його основами є прямокутники.

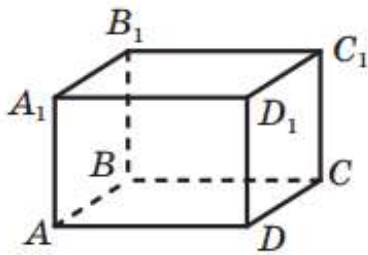


Рис. 17.2

На рисунку 17.2 зображено прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Усі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками.

Правильна чотирикутна призма є окремим видом прямокутного паралелепіпеда.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають **вимірами прямокутного паралелепіпеда**. На рисунку 17.2 довжини

ребер  $AB$ ,  $AD$  і  $AA_1$  є вимірами прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Прямокутний паралелепіпед називають **кубом**, якщо його виміри рівні. Усі грані куба є квадратами.

Зв'язок між паралелепіпедами та їхніми окремими видами ілюструє схема, зображена на рисунку 17.3.



Рис. 17.3

**Теорема 17.1.** Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів.

*Доведення.* Розглянемо діагональ  $AC_1$  прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 17.4).

Доведемо, що  $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$ .

Оскільки трикутник  $ABC$  прямокутний ( $\angle ABC = 90^\circ$ ), то можна записати:  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ . Оскільки  $BC = AD$ , то

$$AC^2 = AB^2 + AD^2. \quad (1)$$

Даний паралелепіпед є прямокутним, тому  $C_1 C \perp ABC$ . Отже, трикутник  $ACC_1$  прямокутний ( $\angle ACC_1 = 90^\circ$ ). Тоді  $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$ . Оскільки  $CC_1 = AA_1$ , то  $AC_1^2 = AC^2 + AA_1^2$ .

Ураховуючи рівність (1), можна записати:

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Для решти трьох діагоналей доведення є аналогічними. ◀

З теореми 17.1 випливає, що діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

**17.3.°** Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут  $60^\circ$ . Знайдіть висоту паралелепіпеда.

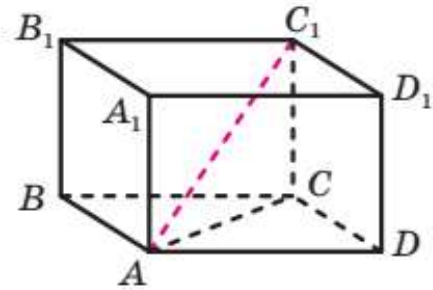
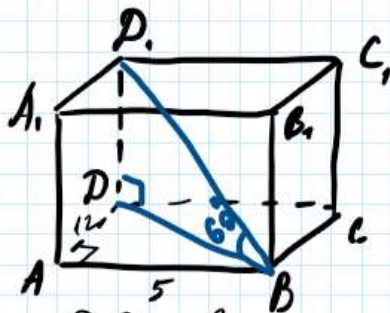


Рис. 17.4





Дано:  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  - паралелепіпед,  
 $AB = 5$  см,  $BC = 12$  см,  $BD_1$  - діагональ,  
 $\angle DBD_1 = 60^\circ$ .  
 Знайти:  $DD_1$ .

Розв'язуємо

$DD_1$  - висота, основи  $DD_1 = BB_1$ ,  $DD_1 \perp (ABC)$ .

З  $\triangle ABD$  ( $\angle A = 90^\circ$ ): за теоремою Піфагора

$$BD^2 = AD^2 + AB^2$$

$$BD^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

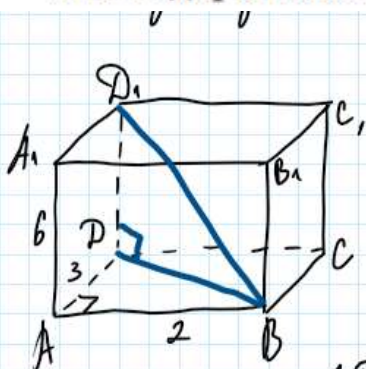
$$BD = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)}.$$

З  $\triangle BDD_1$  ( $\angle D = 90^\circ$ ):  $DD_1 = \operatorname{tg} \angle DBD_1 \cdot BD$

$$DD_1 = \operatorname{tg} 60^\circ \cdot 13 = \sqrt{3} \cdot 13 = 13\sqrt{3} \text{ см}$$

Відповідь:  $DD_1 = 13\sqrt{3}$  см.

17.5.° Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см.



Дано:  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  - паралелепіпед,  
 $AB = 2$  см,  $AD = 3$  см,  $AA_1 = 6$  см.

Знайти:  $BD_1$ .

Розв'язуємо

З  $\triangle ABD$  ( $\angle D = 90^\circ$ ): за теоремою Піфагора

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$BD^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$$BD = \sqrt{13} \text{ (см)}$$

З  $\triangle BDD_1$  ( $\angle D = 90^\circ$ ):  $DD_1 = AA_1 = 6$  см.

За теоремою Піфагора  $BD_1^2 = BD^2 + DD_1^2$

$$BD_1^2 = (\sqrt{13})^2 + 6^2 = 13 + 36 = 49$$

$$BD_1 = \sqrt{49} = 7 \text{ (см)}.$$

Відповідь:  $BD_1 = 7$  см.

17.9.\* Дано прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 17.5),  $AB = 5$  см,  $AD = 7$  см,  $AA_1 = 12$  см. Знайдіть кут:

- між прямою  $DC_1$  і площиною  $BCC_1$ ;
- між прямою  $B_1 D$  і площиною  $ABB_1$ .

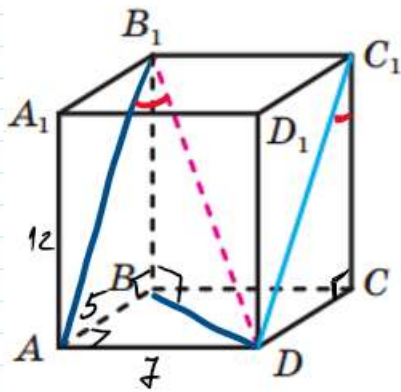


Рис. 17.5

Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямокутний паралелепіпед,

$AB = 5$  см,  $AD = 7$  см,  $AA_1 = 12$  см.

Знайми:  $\angle DC_1 C$ ,  $\angle AB_1 D$ .

Розв'язуємо

1)  $\triangle C_1 CD$  ( $\angle C = 90^\circ$ ):  $CD = AB = 5$  см,

$CC_1 = AA_1 = 12$  см,

$\operatorname{ctg} \angle CC_1 D = \frac{CC_1}{CD}$

$\operatorname{ctg} \angle CC_1 D = \frac{12}{5}$

$\operatorname{ctg} \angle CC_1 D = 2,4$

$\angle CC_1 D = \operatorname{arccotg} 2,4 \approx 23^\circ$

2)  $\triangle AB_1 B$  ( $\angle B = 90^\circ$ ):  $BB_1 = AA_1 = 12$  см, за теоремою

Піфагора  $AB_1^2 = AB^2 + BB_1^2$

$AB_1^2 = 5^2 + 12^2$

$AB_1^2 = 25 + 144 = 169$

$AB_1 = \sqrt{169} = 13$  (см)



3  $\triangle ABD$  ( $\angle A = 90^\circ$ ): за теоремою Піфагора

$$BD^2 = AD^2 + AB^2$$

$$BD^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$$

$$BD = \sqrt{74} \text{ (см)}$$

3  $\triangle B_1D$  ( $\angle B = 90^\circ$ ): за теоремою Піфагора

$$B_1D^2 = BD^2 + BB_1^2$$

$$B_1D^2 = (\sqrt{74})^2 + 12^2 = 74 + 144 = 218 \text{ (см)}$$

$$B_1D = \sqrt{218} \text{ (см)}$$

3  $\triangle AB_1D$ : за теоремою косинусів

$$AD^2 = AB_1^2 + B_1D^2 - 2 AB_1 \cdot B_1D \cdot \cos \angle B_1$$

$$2 AB_1 \cdot B_1D \cdot \cos \angle B_1 = AB_1^2 + B_1D^2 - AD^2$$

$$\cos \angle B_1 = \frac{AB_1^2 + B_1D^2 - AD^2}{2 AB_1 \cdot B_1D}$$

$$\cos \angle B_1 = \frac{13^2 + (\sqrt{218})^2 - 7^2}{2 \cdot 13 \cdot \sqrt{218}} = \frac{169 + 218 - 49}{26 \sqrt{218}} = \frac{338}{26 \sqrt{218}} =$$

$$= \frac{13}{\sqrt{218}} \approx 0,8805$$

$$\angle B_1 = \arccos 0,8805 \approx 28^\circ$$

Відповідь:  $\angle C_1 \approx 23^\circ$ ;  $\angle B_1 \approx 28^\circ$ .

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням

<https://forms.gle/4xHergaxL7EWUhVFA>.

Зворотній зв'язок:

E-mail [t.anastasia.igorivna@gmail.com](mailto:t.anastasia.igorivna@gmail.com)