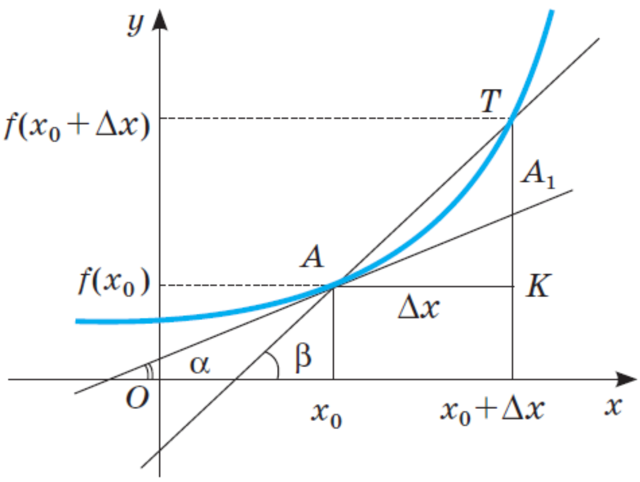
30.11.2022
Група 21
Математика (алгебра)
Урок 3-4
Тема : Похідна функції, її фізичний та геометричний зміст.
Мета:
навчальна: засвоєння означення похідної. Дати поняття фізичного та геометричного змісту похідної, розкриття принципово нової математичної моделі.
виховна: розвивати логічне мислення та пізнавальний інтерес. Формувати культуру особистості, увагу, дисциплінованість, спостережливість.

Матеріали до уроку:

Нехай дано графік функції $y = f(x)$ і на ньому точку A, у якій існує дотична до графіка (мал. 115).

Якщо абсциса точки A дорівнює x_0, то її ордината — $f(x_0)$. Надамо значенню аргументу x_0 приріст Δx.

Нарощеному значенню аргументу $x_0 + \Delta x$ на графіку функції відповідає точка T з абсцисою $x_0 + \Delta x$ і ординатою $f(x_0 + \Delta x)$.



Мал. 115

Через точки A і T проведемо прямі AK і TK, паралельні осям абсцис і ординат; вони перетнуться в деякій точці K. Тоді $AK = \Delta x$ — приріст аргументу, а $TK = \Delta y$ — приріст функції на $[x_0;\ x_0 + \Delta x]$.

Кутовий коефіцієнт січної AT дорівнює тангенсу кута β, тобто відношенню Δy до Δx:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо приріст аргументу Δx зменшувати так, щоб він прямував до нуля, то січна AT, повертаючись навколо точки A, наближатиметься до прямої AA_1. Таку пряму AA_1 — граничне положення січної AT при $\Delta x \to 0$ — називають *дотичною до графіка* даної функції в точці x_0.

Якщо $\Delta x \to 0$, то міра кута β прямує до α, а тангенс кута β — до $\operatorname{tg}\alpha$. Тобто якщо k — кутовий коефіцієнт цієї дотичної і $\Delta x \to 0$, то

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\beta\to\alpha} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

До обчислення значення виразу

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \text{ чи } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

приводять розв'язування багатьох задач із механіки, електрики, біології, економіки, статистики тощо. Саме тому цей вираз отримав спеціальну назву — *похідна*.

> **!** **Похідною функції $f(x)$ у точці x_0** називають границю відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує.

Похідну функції $f(x)$ у точці x_0 позначають $f'(x_0)$. Її означення записують також у вигляді рівності

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \quad \text{або } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2$ у точці $x = 3$.

Розв'язання. Надамо аргументу $x = 3$ приріст Δx. Відповідний приріст функції $\Delta y = (3 + \Delta x)^2 - 3^2 = 6\Delta x + (\Delta x)^2$. Тому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 6 + \Delta x$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 6$. Отже, $f'(3) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6$.

Відповідь. $f'(3) = 6$.

Так розв'язують задачу, користуючись означенням похідної функції в точці.

Досі йшлося про похідну функції в точці. А можна розглядати похідну функції і як функцію.

Нехай, наприклад, дано функцію $y = x^2$. Знайдемо її похідну в довільній точці x. Для цього надамо значенню x приріст Δx. Відповідний йому приріст функції $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

Тому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x$. Маємо $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

Отже, похідна функції x^2 у кожній її точці x дорівнює $2x$. Пишуть:

$$(x^2)' = 2x, \text{ або якщо } y = x^2, \text{ то } y' = 2x.$$

Зверніть увагу! Похідна функції в точці — це число. Але коли говорять про похідну, не вказуючи «в точці», мають на увазі похідну як функцію:

- похідною функції $y = x^2$ є функція $y' = 2x$;
- похідною функції $y = x^3$ є функція $y' = 3x^2$ тощо.

Знаючи це, похідну функції в точці можна обчислювати простіше, ніж за означенням похідної функції в точці.

Приклад 2. Дано функцію $f(x) = x^2$. Знайдіть $f'(3)$, $f'(0)$, $f'(-2)$.

Розв'язання. Похідною функції $f(x) = x^2$ є функція $f'(x) = 2x$. Тому $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$; $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$; $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

Лінійна функція $y = ax + b$ має похідну в кожній точці x. Її похідна

$$y' = (ax + b)' = a.$$

Зокрема, $x' = 1$; $a' = 0$.

Запам'ятайте! Похідна сталої дорівнює нулю. У кожній точці дотична до графіка функції $y = a$, де a — стала, паралельна осі x.

Дотичною до прямої є ця сама пряма. З курсу планіметрії відомо, що рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M(x_0; y_0)$, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$, де k — кутовий коефіцієнт прямої. Оскільки для дотичної до графіка функції $y = f(x)$ кутовий коефіцієнт дорівнює значенню похідної в точці дотику, то можемо записати рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці дотику $(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ або } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

1) Доведіть, що для кожного дійсного числа k та аргументу x $(kx^2)' = 2kx$.

Доведення. Надамо аргументу x приріст Δx. Відповідний приріст функції $y = kx^2$ дорівнює $k(x + \Delta x)^2 - kx^2$.

Спростимо цей вираз:

$k(x + \Delta x)^2 - kx^2 = k(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2) = k\Delta x(2x + \Delta x)$.

Отже, $(kx^2)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{k\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k(2x + \Delta x) = 2kx$.

2) Доведіть, що для будь-якого значення x, відмінного від нуля, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Доведення. Надамо аргументу x приріст Δx. Відповідний приріст функції дорівнює $\dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - x - \Delta x}{(x + \Delta x)x} = \dfrac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x}$.

Отже, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x \cdot \Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-1}{(x + \Delta x)x} = -\dfrac{1}{x^2}$.

3) Доведіть, що для функції $y = x^3$ похідною є функція $y' = 3x^2$.

Доведення. $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to 3x^2$.

Домашнє завдання:

1. **Зробити конспект**

2. З підручника «Математика» Бевз, 2018р. – **ст.124 №551, 557**

Додаткові матеріали:

1. https://www.youtube.com/watch?v=6Vr_newj98k
2. https://www.youtube.com/watch?v=HFePeVBGTl8

Зворотній зв'язок:

E-mail vitasergiivna1992@gmail.com