30.12.2022

Група 24

Математика (алгебра)

Урок 7-8

Тема: Контрольна робота №1 «Перпендикулярність прямих і площин»

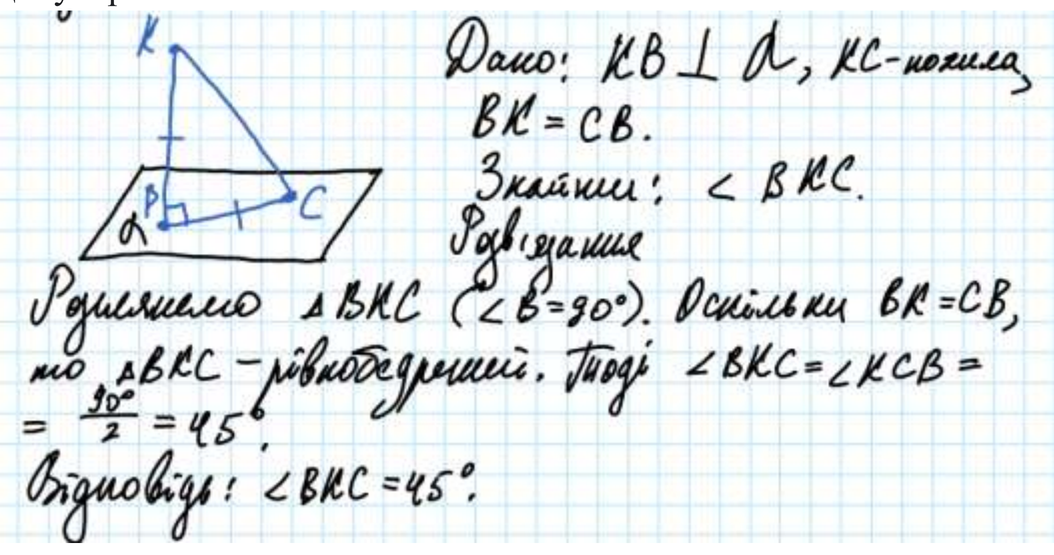
Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв’язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

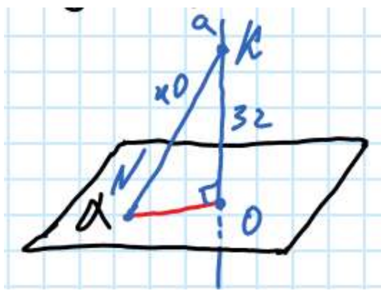
Матеріали до уроку:

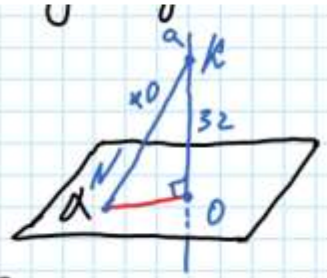
Варіант 0

1. (2 бали) З даної точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина перпендикуляра дорівнює довжині проекції похилої. Знайти кут між перпендикуляром і похилою.



2. (2 бали) Пряма a перпендикулярна до площини α і перетинає її в точці O. Точка K лежить на даній прямій і віддалена від площини α на 32 см, а від точки N цієї площини – на 40 см. Знайдіть NO.





Дано: $a \cap \alpha = O$, $K \in a$, $KO \perp \alpha$, $KO = 32$ см, $KN = 40$ см, $N \in \alpha$.

Знайти: NO.

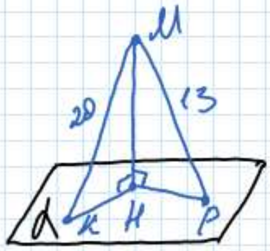
Розв'язання

Розглянемо $\triangle NKO$ ($\angle O = 90°$). $NO^2 = NK^2 - KO^2$.

$NO^2 = 40^2 - 32^2 = 576$. $NO = \sqrt{576} = 24$ (см).

Відповідь: $NO = 24$ см.

3. (2 бали) З точки M до площини α проведено дві похилі завдовжки 20 см і 13 см. Одна з проекцій цих похилих на 11 см більша за іншу. Знайдіть проекцію більшої похилої та відстань від точки M до площини α.



Дано: MK та MP – похилі, $MH \perp \alpha$, $MK = 20$ см, $MP = 13$ см, $KH = PH + 11$

Знайти: KH, MH.

Розв'язання

1) Нехай $KH = x$ см. Тоді $PH = (x - 11)$ см.

З $\triangle MHK$ ($\angle H = 90°$): $MH^2 = MK^2 - HK^2$.

З $\triangle MPH$ ($\angle H = 90°$): $MH^2 = MP^2 - PH^2$.

$MK^2 - HK^2 = MP^2 - PH^2$

$20^2 - x^2 = 13^2 - (x - 11)^2$

$400 - x^2 = 169 - x^2 + 2 \cdot x \cdot 11 - 11^2$

$400 - x^2 = 169 - x^2 + 22x - 121$

$\cancel{-x^2} + \cancel{x^2} - 22x = 169 - 121 - 400$

$22x = 352$

$x = 16$ (см) – KH.

2) $MH^2 = MK^2 - HK^2$

$MH^2 = 20^2 - 16^2$

$MH^2 = 400 - 256$

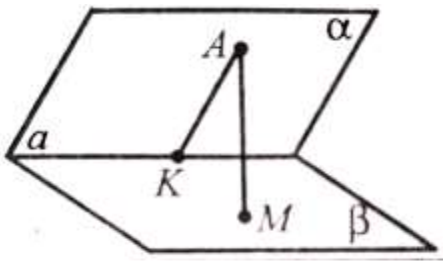
$MH^2 = 144$

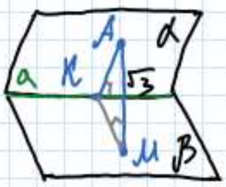
$MH = \sqrt{144}$

$MH = 12$ (см)

Відповідь: $KH = 16$ см; $MH = 12$ см.

4. (3 бали) Площини α і β перетинаються по прямій a під кутом 60°. Точка A належить площині α. Довжина відрізка AM є відстанню від точки A до площини β, а довжина відрізка AK – відстанню від точки A до прямої a. Знайдіть довжину відрізка AK, якщо $AM = \sqrt{3}$ см.





Дано: $\alpha \cap \beta = a$, $A \in \alpha$, $M \in \beta$,
$\angle(\alpha, \beta) = 60^\circ$; $AM \perp \beta$, $AK \perp a$,
$AM = \sqrt{3}$ см.
Знайти: AK.

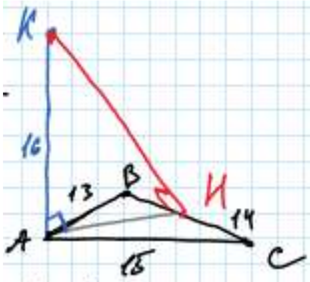
Розв'язання

$\angle(\alpha, \beta) = \angle AKM = 60^\circ$. Розгл. $\triangle AKM$ ($\angle M = 90^\circ$).
$\angle A = 90^\circ - \angle K = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.
$AK = 2KM$ за властивістю катета навпроти кута 30°. Нехай $KM = x$ см, тоді $AK = 2x$ см.
$AM^2 = AK^2 - KM^2$
$(\sqrt{3})^2 = (2x)^2 - x^2$
$3 = 4x^2 - x^2$
$3x^2 = 3$
$x^2 = 1$
$x = 1$ (см) $- KM$.

$AK = 2 \cdot 1 = 2$ (см).
Відповідь: $AK = 2$ см.

Додаткове завдання (одне на вибір).

5(1). (3 бали) Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Через вершину середнього за величиною кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр завдовжки 16 см. Знайдіть (у см) відстань від кінця цього



Дано: $AK \perp (ABC)$, $AB = 13$ см,
$BC = 14$ см, $AC = 15$ см, $KH \perp BC$,
$AK = 16$ см.
Знайти: KH.

Розв'язання

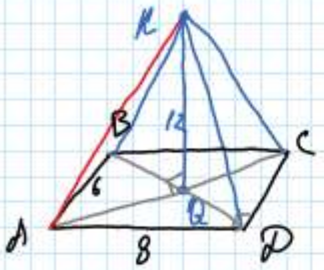
$AH \perp BC$ за теоремою про три перпендикуляри.
Нехай $BH = x$ см, тоді $CH = (14 - x)$ см.
З $\triangle ABH$ ($\angle H = 90^\circ$): $AH^2 = AB^2 - BH^2$.
З $\triangle ACH$ ($\angle H = 90^\circ$): «$AH^2 = AC^2 - CH^2$.»
$AB^2 - BH^2 = AC^2 - HC^2$
$13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$
$169 - x^2 = 225 - 14^2 + 2 \cdot 14 \cdot x - x^2$
$169 - x^2 = 225 - 196 + 28x - x^2$
$\cancel{-x^2} - 28x + \cancel{x^2} = 225 - 196 - 169$
$-28x = -140$
$x = \frac{-140}{-28}$ $\quad x = 5$ (см) $- BH$.

З $\triangle ABH$ ($\angle H = 90^\circ$):
$AH^2 = AB^2 - BH^2$
$AH^2 = 13^2 - 5^2$
$AH^2 = 169 - 25 = 144$
$AH = \sqrt{144} = 12$ (см).

З $\triangle AKH$ ($\angle H = 90^\circ$):
$KH^2 = AK^2 + AH^2$
$KH^2 = 256 + 144 = 400$
$KH = \sqrt{400} = 20$ (см).

перпендикуляра, що не лежить у площині трикутника, до протилежної сторони трикутника.

5(2). (3 бали) Точка Q належить площині прямокутника $ABCD, QK -$ перпендикуляр до цієї площини, $QK = 12$ см. Знайдіть довжину відрізка KA, якщо $AB = 6$ см, $AD = 8$ см, $KA = KB = KC = KD$.



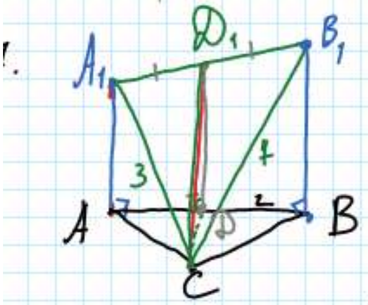
Дано: $ABCD$ - прямокутник.
$Q \in (ABC)$, $K \notin (ABC)$, $QK \perp (ABC)$,
$QK = 12$ см, $AB = 6$ см, $AD = 8$ см,
$AK = BK = CK = DK$.
Знайти: AK.

Розв'язання

$AB = CD = 6$ см, $BC = AD = 8$ см - за означенням прямокутника
Розглянемо $\triangle ACD$ $(\angle D = 90°)$. $AC^2 = AD^2 + CD^2$.
$AC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$
$AC = \sqrt{100} = 10$ см
$AQ = CQ$ за властивістю прямокутника, а тому
$AQ = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5$ (см).
З $\triangle AKQ$ $(\angle Q = 90°)$: $AK^2 = KQ^2 + AQ^2$
$AK^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$
$AK = \sqrt{169} = 13$ (см)
Відповідь: $AK = 13$ см.

5(3). (3 бали) Дано рівносторонній трикутник $ABC, AB = 2$ см, $AA_1 \perp (ABC), BB_1 \perp (ABC), CA_1 = 3$ см,, $CB_1 = 7$ см, $A_1D = DB_1$. Знайдіть довжину CD.

1.



Дано: $\triangle ABC$ – рівносторонній,
$AB = BC = AC = 2$ см, $AA_1 \perp (ABC)$,
$BB_1 \perp (ABC)$, $AC = 3$ см, $B_1C_1 = 7$ см,
$A_1D_1 = B_1D_1$.
Знайти: CD.

Розв'язання

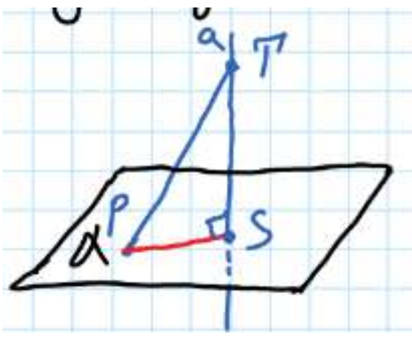
У $\triangle AA_1C$ ($\angle A = 90^\circ$): $AC = 2$ см, $A_1C = 3$ см, $AA_1^2 = A_1C^2 - AC^2$.
$AA_1^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$.
$AA_1 = \sqrt{5}$ см.
У $\triangle BB_1C$ ($\angle B = 90^\circ$): $BC = 2$ см, $B_1C = 7$ см, $BB_1^2 = B_1C^2 - BC^2$.
$BB_1^2 = 7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45$.
$BB_1 = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$ см.
Оскільки $AA_1 \parallel BB_1$, то AA_1B_1B – трапеція. $DD_1 \parallel AA_1$ і $DD_1 \parallel BB_1$, D_1 – середина A_1B_1, тому DD_1 – середня лінія трапеції.

$$DD_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 3\sqrt{5}}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5} \text{ (см)}.$$

З $\triangle ADC$ ($\angle D = 90^\circ$, оскільки в рівносторонньому трикутнику медіана є бісектрисою і висотою).
$AD = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$ (см).
$CD_1^2 = AC^2 - AD^2$
$CD_1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$, $CD_1 = \sqrt{3}$ см.
З $\triangle CDD_1$ ($\angle D_1 = 90^\circ$): $CD^2 = CD_1^2 + DD_1^2$.
$CD^2 = (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{5})^2 = 3 + 4 \cdot 5 = 3 + 20 = 23$.
$CD = \sqrt{23}$ (см).
Відповідь: $CD = \sqrt{23}$ см.

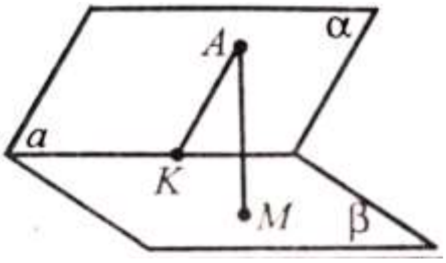
Варіант 1

1. (2 бали) З даної точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина перпендикуляра дорівнює половині довжини похилої. Знайти кут між перпендикуляром і похилою.



2. (2 бали) Пряма a перпендикулярна до площини α і перетинає її в точці S. Точка T лежить на даній прямій і віддалена від площини α на 3 см, а від точки P цієї площини – на $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть PS.

3. (2 бали) З точки J до площини α проведено дві похилі завдовжки 30 см і 14 см. Одна з проекцій цих похилих на 22 см більша за іншу. Знайдіть проекцію більшої похилої та відстань від точки J до площини α.



4. (3 бали) Площини α і β перетинаються по прямій a під кутом $60°$. Точка A належить площині α. Довжина відрізка AM є відстанню від точки A до площини β, а довжина відрізка AK – відстанню від точки A до прямої a. Знайдіть довжину відрізка AK, якщо $AM = 7\sqrt{2}$ см.

Додаткове завдання (одне на вибір).

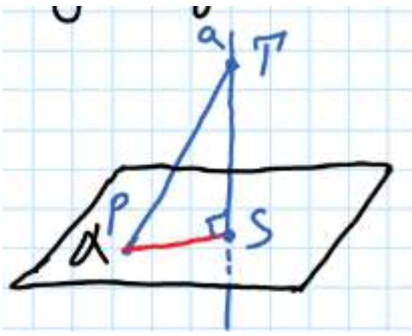
5(1). (3 бали) Сторони трикутника дорівнюють 26 см, 28 см і 30 см. Через вершину меншого за величиною кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр завдовжки 32 см. Знайдіть (у см) відстань від кінця цього перпендикуляра, що не лежить у площині трикутника, до протилежної сторони трикутника.

5(2). (3 бали) Точка Q належить площині прямокутника $ABCD, QK -$ перпендикуляр до цієї площини, $AK = 25$ см. Знайдіть довжину відрізка QK, якщо $AB = 12$ см, $AD = 16$ см, $KA = KB = KC = KD$.

5(3). (3 бали) Дано рівносторонній трикутник $ABC, AB = 4$ см, $AA_1 \perp (ABC), BB_1 \perp (ABC), CD_1 = 6$ см, $CB_1 = 14$ см, $A_1D = DB_1$. Знайдіть довжину D_1D.

Варіант 2

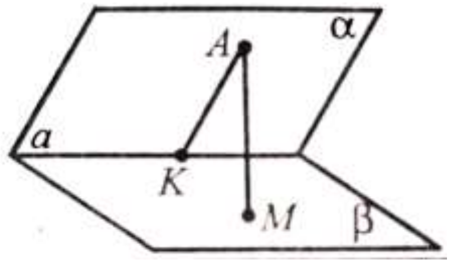
1. (2 бали) З даної точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Кут між похилою і площиною дорівнює $45°$. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо похила дорівнює 16 см.



2. (2 бали) Пряма a перпендикулярна до площини α і перетинає її в точці S. Точка T лежить на даній прямій і віддалена від площини α на 8 см, а від точки P цієї площини – на $5\sqrt{3}$ см. Знайдіть PS.

3. (2 бали) З точки J до площини α проведено дві похилі завдовжки 13 см і 7 см. Проекції цих похилих відносяться як 4:1. Знайдіть проекцію меншої похилої та відстань від точки J до площини α.

4. (3 бали) Площини α і β перетинаються по прямій a під кутом 30°. Точка A належить площині α. Довжина відрізка AM є відстанню від точки A до площини β, а довжина відрізка AK – відстанню від точки A до прямої a. Знайдіть довжину відрізка KM, якщо $AM = 23$ см.



Додаткове завдання (одне на вибір).

5(1). (3 бали) Сторони трикутника дорівнюють 19 см, 17 см і 12 см. Через вершину меншого за величиною кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр завдовжки 11 см. Знайдіть (у см) відстань від кінця цього перпендикуляра, що не лежить у площині трикутника, до протилежної сторони трикутника.

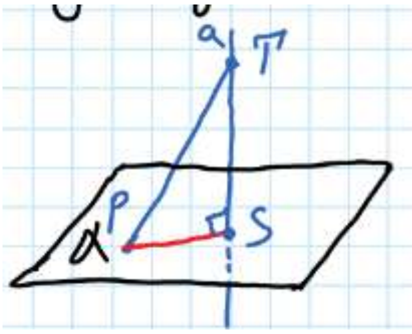
5(2). (3 бали) Точка Q належить площині прямокутника $ABCD, QK -$ перпендикуляр до цієї площини, $AK = 15$ см. Знайдіть довжину відрізка QK, якщо $AB = 10$ см, $AD = 20$ см, $KA = KB = KC = KD$.

5(3). (3 бали) Дано рівносторонній трикутник $ABC, AB = 6$ см, $AA_1 \perp (ABC), BB_1 \perp (ABC), CD_1 = 18$ см, $CA_1 = 21$ см, $A_1D = DB_1$. Знайдіть довжину B_1B.

Варіант 3

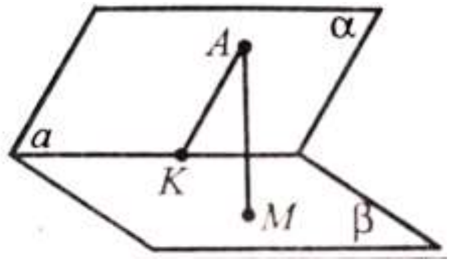
1. (2 бали) З даної точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Кут між похилою і площиною дорівнює 30°. Знайдіть довжину похилої, якщо проекція перпендикуляра на площину дорівнює 15 см.

2. (2 бали) Пряма a перпендикулярна до площини α і перетинає її в точці S. Точка T лежить на даній прямій і віддалена від площини α на 14 см, а від точки P цієї площини – на $10\sqrt{2}$ см. Знайдіть PS.



3. (2 бали) З точки J до площини α проведено дві похилі завдовжки 30 см і 10 см. Проекції цих похилих відносяться як 3:2. Знайдіть проекцію більшої похилої та відстань від точки J до площини α.

4. (3 бали) Площини α і β перетинаються по прямій a під кутом 30°. Точка A належить площині α. Довжина відрізка AM є відстанню від точки A до площини β, а довжина відрізка AK – відстанню від точки A до прямої a. Знайдіть довжину відрізка AM, якщо $KM = 30$ см.



Додаткове завдання (одне на вибір).

5(1). (3 бали) Сторони трикутника дорівнюють 52 см, 56 см і 60 см. Через вершину меншого за величиною кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр завдовжки 64 см. Знайдіть (у см) відстань від кінця цього перпендикуляра, що не лежить у площині трикутника, до протилежної сторони трикутника.

5(2). (3 бали) Точка Q належить площині прямокутника $ABCD, QK -$ перпендикуляр до цієї площини, $QK = 6$ см. Знайдіть довжину відрізка AK, якщо $AB = 3$ см, $AD = 4$ см, $KA = KB = KC = KD$.

5(3). (3 бали) Дано рівносторонній трикутник $ABC, AB = 8$ см, $AA_1 \perp (ABC), BB_1 \perp (ABC), CD_1 = 12$ см, $BB_1 = 28$ см, $A_1D = DB_1$. Знайдіть довжину A_1A.

Домашнє завдання: повторити поняття координат точок та векторів.

Зворотній зв'язок:
E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com