30.12.2022

Група 26

Математика (алгебра)

Урок 25-26

Тема: Показникові нерівності

Мета:

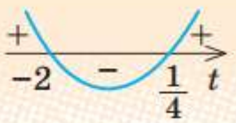
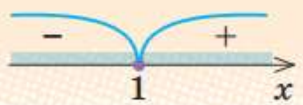
- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

2. Схема рівносильних перетворень найпростіших показникових нерівностей

$a>1$	$0<a<1$
$a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$ *знак нерівності зберігається*	$a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$ *знак нерівності змінюється на протилежний*
Приклади	
$2^{x-3}>4.$ ▸ $2^{x-3}>2^2.$ Функція $y=2^t$ є зростаючою, отже: $x-3>2;\ x>5.$ *Відповідь:* $(5;+\infty)$. ■	$0,7^{x-3}>0,49.$ ▸ $0,7^{x-3}>0,7^2.$ Функція $y=0,7^t$ є спадною, отже: $x-3<2;\ x<5.$ *Відповідь:* $(-\infty;5)$. ■

3. Розв'язування показникових нерівностей, які зводяться до найпростіших

Орієнтир	Приклад
I. За допомогою рівносильних перетворень (за схемою розв'язування показникових рівнянь, табл. 3) **задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду** (квадратної, дробової тощо). Після розв'язування одержаної нерівності приходимо до найпростіших показникових нерівностей. 	$4^{x+1}+7\cdot 2^x-2>0.$ ▸ $4^x\cdot 4+7\cdot 2^x-2>0;$ $2^{2x}\cdot 4+7\cdot 2^x-2>0.$ Виконаємо заміну $2^x=t$, одержимо нерівність $4t^2+7t-2>0$, множина її розв'язків $t<-2$ або $t>\frac{1}{4}$ (див. рисунок). У результаті оберненої заміни отримаємо $2^x<-2$ (розв'язків немає) або $2^x>\frac{1}{4}$, звідки $2^x>2^{-2}$, тобто $x>-2$. *Відповідь*: $(-2;+\infty)$. ■
II. Застосовуємо загальний метод інтервалів — зводимо задану нерівність до виду $f(x)\gtrless 0$ і використовуємо таку схему. **1. Знайти ОДЗ.** **2. Знайти нулі функції $f(x)$.** **3. Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які ОДЗ розбивається нулями.** **4. Записати відповідь, ураховуючи знак нерівності.** 	$3^x+4^x>7.$ ▸ Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Задана нерівність рівносильна нерівності $3^x+4^x-7>0.$ Позначимо $f(x)=3^x+4^x-7.$ 1) ОДЗ: $x\in \boldsymbol{R}$. 2) Нулі функції: $f(x)=0$; $3^x+4^x-7=0$. Оскільки функція $f(x)=3^x+4^x-7$ є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій), то значення 0 вона набуває тільки в одній точці області визначення: $x=1$ $\left(f(1)=3^1+4^1-7=0\right)$. 3) Позначаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (див. рисунок), і записуємо множину розв'язків нерівності $f(x)>0$. *Відповідь*: $(1;+\infty)$. ■

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $0{,}6^{x^2-7x+6} \geqslant 1$.

Розв'язання

$0{,}6^{x^2-7x+6} \geqslant 0{,}6^0$.

Оскільки функція $y=0{,}6^t$ є спадною, то $x^2-7x+6 \leqslant 0$.

Звідси $1 \leqslant x \leqslant 6$ (див. рисунок 2.3.2).

Рис. 2.3.2

Відповідь: $[1;6]$.

Коментар

Запишемо праву частину нерівності як степінь числа 0,6, тобто $1=0{,}6^0$.
Оскільки $0{,}6<1$, то при переході від порівняння степенів до порівняння показників степеня знак нерівності змінюється на протилежний (одержуємо нерівність, рівносильну заданій).
Для розв'язування одержаної квадратної нерівності використаємо графічну ілюстрацію.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leqslant 8$.

Розв'язання

ОДЗ: $x \geqslant 0$.

$$3^{\sqrt{x}} - \frac{3^2}{3^{\sqrt{x}}} \leqslant 8.$$

Виконуємо заміну змінної $3^{\sqrt{x}} = t \quad (t>0)$, в результаті отримуємо нерівність $t-\frac{9}{t} \leqslant 8$, яка рівносильна нерівності

$$\frac{t^2-8t-9}{t} \leqslant 0.$$

Оскільки $t>0$, одержуємо $t^2-8t-9 \leqslant 0$. Звідси $-1 \leqslant t \leqslant 9$. Ураховуючи, що $t>0$, маємо $0<t \leqslant 9$.
Виконуючи обернену заміну, одержуємо $0<3^{\sqrt{x}} \leqslant 9$. Тоді

$$3^{\sqrt{x}} \leqslant 3^2.$$

Функція $y=3^t$ зростаюча, отже, $\sqrt{x} \leqslant 2$. Ураховуючи ОДЗ, одержуємо

$$0 \leqslant x \leqslant 4.$$

Відповідь: $[0;4]$.

Коментар

Оскільки рівносильні перетворення нерівностей виконуються на ОДЗ початкової нерівності, то врахуємо цю ОДЗ. Використовуючи формулу $a^{u-v}=\frac{a^u}{a^v}$, позбуваємося числового доданка в показнику степеня й одержуємо степені з однією основою 3, що дозволяє виконати заміну змінної $3^{\sqrt{x}}=t$, де $t>0$.
В одержаній нерівності знаменник є додатним, тому цю дробову нерівність можна звести до рівносильної їй квадратної.
Після виконання оберненої заміни треба врахувати не тільки зростання функції $y=3^t$, а й ОДЗ початкової нерівності.

Приклад 3*. Розв'яжіть нерівність $(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0$.

Коментар

Задану нестрогу нерівність зручно розв'язувати методом інтервалів. Записуючи відповідь, треба враховувати, що *у випадку, коли ми розв'язуємо нестрогу нерівність* $f(x) \leqslant 0$, *усі нулі функції* $f(x)$ *мають увійти до відповіді.*

Розв'язання

▶ Позначимо $f(x) = (3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8}$.

1) ОДЗ: $x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$. Тоді $x \leqslant -2$ або $x \geqslant 4$ (рис. 2.3.3).

2) Нулі функції: $f(x) = 0$;

$(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} = 0$,

тоді $3^x - 9 = 0$ або $\sqrt{x^2 - 2x - 8} = 0$.

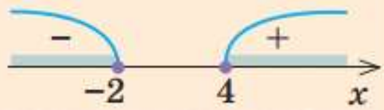
Із першого рівняння: $x = 2$ — не входить до ОДЗ; із другого: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

3) Позначаємо нулі функції $f(x)$ на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які нулями розбивається ОДЗ (рис. 2.3.4), і записуємо множину розв'язків нерівності $f(x) \leqslant 0$: $x \in (-\infty; -2]$ або $x = 4$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -2] \cup \{4\}$. ■

Рис. 2.3.3

Рис. 2.3.4



Домашнє завдання: пройти тест за посиланням https://forms.gle/a7hrUk1nBT4M78z3A.

Зворотній зв'язок:
E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com