14.03.2023
Група 32
Математика (алгебра)
Урок 48
Тема: Повторення. Розв’язування тригонометричних рівнянь
Мета: Формування в учнів умінь розв’язувати тригонометричні рівняння способом:

- заміни змінних;
- зведення до однієї тригонометричної функції з однаковим аргументом;
- розкладанням на множники;
- введення допоміжного кута;
- зведення до однорідного рівняння.

Розвивати логічне мислення, уяву, пам'ять, виховувати інтерес до математики, уважність, відповідальність, культуру математичних записів, позитивне ставлення до навчання.

Матеріали до уроку:

Розв’язування рівнянь

Переходимо до пояснення розв'язків складних тригонометричних рівнянь. Тут маємо приклади де аргумент в тригонометричній функції знаходиться під коренем або в квадраті, також рівняння де аргумент або сама функція містяться під модулем. Кожен з прикладів вимагає іншого підходу при зведенні рівнянь до найпростішого типу. Водночас на подібних прикладах Ви швидко навчитеся розписувати складні завдання та знатимете яку зі схем застосовувати.

Приклад 18.13 Розв'язати рівняння $\cos^2(x)+5\cos(x)-6=0$.

А	Б	В	Г	Д
$x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$	$x=\pm\arccos 1+\pi n$, $n\in Z$	$x=2\pi n$, $n\in Z$, $x=\pm(\pi-\arccos 6)+$ $+2\pi k$, $k\in Z$	$x=\pi n$, $n\in Z$	$x=2\pi n$, $n\in Z$

Розв'язання: З вигляду тригонометричного рівняння робимо висновок, що через заміну змінних його слід звести до квадратного рівняння.
Зробимо заміну $\cos(x)=t$, причому змінна має відповідати області визначення косинуса $-1\le t\le 1$.
В такий спосіб прийдемо до квадратного рівняння $t^2+5t-6=0$.
За теоремою Вієта знаходимо: $t1=1$ і $t2=-6<-1$ (не задовольняє умові).
Отже, отримали $\cos(x)=1$, звідси корінь рівний
$x=2\pi n,\ n\in Z$
Відповідь: Д.

Приклад 18.15 Розв'язати рівняння $\sin(x^2)=0$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{\pi n}$, $n\in N$	0	$\{0\}\cup\{\sqrt{2\pi n}, n\in N\}$	$-\sqrt{2\pi n}$, $n\in N$	$\{0\}\cup\{\pm\sqrt{\pi n}, n\in N\}$

Розв'язання: Аргумент під синусом міститься в другому степені, тому з правої частини потрібно буде знаходити корінь квадратний.
Запишемо розв'язок рівняння
$\sin x^2=0,\ x^2=\pi n,\ n\in Z$
звідси $x=\pm\sqrt{\pi n},\ n\in N$, а також 0, оскільки раніше номер пробігав множину цілих чисел (тепер натуральних).
Остаточно отримаємо множину коренів
$x=\{0\}\cup\{\pm\sqrt{\pi n}, n\in N\}$
Відповідь: Д.

Приклад 18.18 Розв'язати рівняння *cos(cos(x))=1*.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\pm\arccos(2\pi n)+$ $+2\pi n$, $n\in Z$	$x=2\pi n$, $n\in Z$	$x=\pm\pi+2\pi n$, $n\in Z$

Маємо косинус від косинуса в лівій частині та одиницю в правій.
Розкриваємо зовнішній косинус
$\cos(\cos x)=1, \cos x=2\pi k, k\in Z$
Далі виписуємо обмеження на ОДЗ внутрішнього косинуса
$\left[\begin{array}{l}2\pi k>1\\2\pi k<-1\end{array}\right.$
при $k\in Z\setminus\{0\}$ (без нуля).
Потрібних номерів *k* щоб виконувались нерівності немає, тому розглянемо єдиний випадок:
k=0, тоді *cos(x)=0*, звідси $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$
Відповідь: Б.

Приклад 18.19 Розв'язати рівняння *sin(x)+sin(|x|)=0*.

А	Б	В	Г	Д
$x=\pi n$, $n\in Z$	0	$(-\infty;0]$	$(-\infty;0]\cup\{\pi n, n\in N\}$	$(-\infty;0]\cup\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\right\}$

Розв'язання: Маємо тригонометричне рівняння з синусами, один з аргументів в якому взятий по модулю.
Для обчислень замінюємо наведене р-ня системою рівнянь для різних значень аргументу
$\sin x+\sin|x|=0\to\left[\begin{array}{ll}\sin x+\sin x=0 & x>0\\ \sin x-\sin x=0, & x\le 0\end{array}\right.$
Далі рівняння розв'язуємо:
$\left[\begin{array}{l}2\sin x=0\\0=0\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in N\\x\in(-\infty,0]\end{array}\right.$
Сукупність розв'язків заданого рівняння має вигляд:
$x\in(-\infty,0]\cup\{\pi n, n\in N\}$
Відповідь: Г.

Тригонометричні рівняння з параметром одні з важчих в курсі тригонометрії. При розкритті таких рівнянь потрібно враховувати область допустимих значень тригонометричних функцій, а також застосовувати весь багаж формул, щоб перетворити рівняння до простого типу.
Приклади, що далі наведені входять в збірники з підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.

Приклад 18.21 За якого найменшого значення параметра а рівняння *2cos(4x)=a-5* має корені?

А	Б	В	Г	Д
-3	0	3	1	-1

Розв'язання: Рівняння з параметрами одні з найважчих, і це стосується не тільки курсу тригонометрії.
Тому їх слід розписувати уважно та враховувати всі можливі обмеження.
Запишемо р-ня *2cos(4x)=a-5* у вигляді *cos(4x)=(a-5)/2*.
Згідно з обмеженнями на область допустимих значень функції косинус, задане тригонометричне рівняння матиме корені, якщо параметр лежатиме в інтервалі
$-1\le\frac{a-5}{2}\le 1$

Розв'яжемо отриману систему нерівностей:

$-1 \le \frac{a-5}{2} \le 1 \to -2 \le a-5 \le 2 \to$

$-2+5 \le a-5+5 \le 2+5 \to 3 \le a \le 7$

Отже, при *a[min]=3* рівняння *2cos(4x)=a-5* має корені.

Відповідь: В.

Приклад 18.22 Знайти всі значення параметра а, за яких рівняння *(a+2)sin(x)=a^2-4* має корені.

А	Б	В	Г	Д
$a \in (1;3)$	$a \in R$	$a \ne 2$	$a \in \{-2\} \cup [1;3]$	$\varnothing$

Розв'язання: Розпишемо праву частину рівняння з параметром за формулою різниці квадратів

$(a+2)\sin x = a^2 - 4 \to (a+2)\sin x = (a+2)(a-2)$

Очевидно, що при *a=-2* рівняння матиме безліч коренів, оскільки маємо тотожність *0=0*.

Розглянемо випадок:

sin(x)=a-2.

З обмежень на область допустимих значень функції синус виписуємо умову, що параметр повинен знаходитися в межах *-1≤a-2≤1*.

Спрощуємо систему нерівностей:

$-1 \le a-2 \le 1 \to$

$-1+2 \le a-2+2 \le 1+2 \to$

$1 \le a \le 3$

Отримали, що при $a \in \{-2\} \cup [1;3]$ тригонометричне рівняння *(a+2)sin(x)=a^2-4* має корені.

Відповідь: Г.

Домашнє завдання:

Зробити конспект

Зворотній зв'язок

E-mail vitasergiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.