

16.01.2023

Група 14

Математика (геометрія)

Урок 20-21

Тема: Перпендикулярність прямої і площини

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Означення. Пряму називають **перпендикулярною до площини**, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині (рис. 34.4).

Якщо пряма a перпендикулярна до площини α , то записують: $a \perp \alpha$. Також прийнято говорити, що площина α перпендикулярна до прямої a або пряма a та площина α перпендикулярні.

З означення випливає, що коли пряма a перпендикулярна до площини α , то вона перетинає цю площину.

Відрізок називають **перпендикулярним до площини**, якщо він належить прямій, перпендикулярній до цієї площини.

Наприклад, інтуїтивно зрозуміло, що ребро AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярне до площини ABC (рис. 34.5). Довести цей факт нескладно, скориставшись такою теоремою.

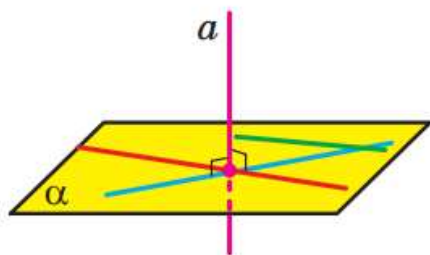


Рис. 34.4

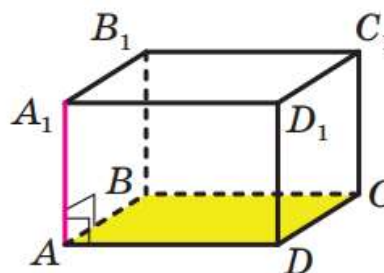
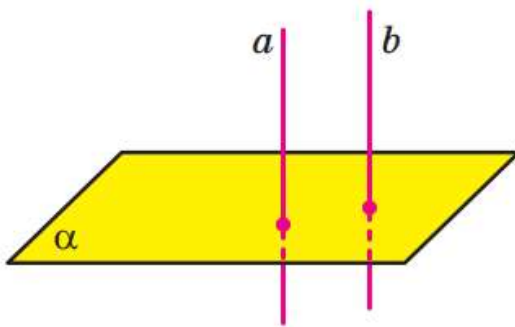


Рис. 34.5

Теорема 34.1 (ознака перпендикулярності прямої та площини). Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що лежать у площині та перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини.

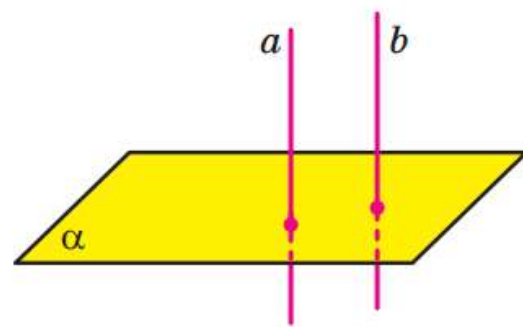
Теорема 34.2. Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то й друга пряма перпендикулярна до цієї площини (рис. 34.7).

Наприклад, на рисунку 34.5 пряма AA_1 перпендикулярна до площини ABC , а пряма CC_1 паралельна прямій AA_1 . Отже, за теоремою 34.2 пряма CC_1 також є перпендикулярною до площини ABC .



Якщо $a \parallel b$ і $a \perp \alpha$, то $b \perp \alpha$

Рис. 34.7



Якщо $a \perp \alpha$ і $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$

Рис. 34.8

Сформулюємо теорему, що є ознакою паралельності двох прямих.

Теорема 34.3. Якщо дві прямі перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то вони паралельні (рис. 34.8).

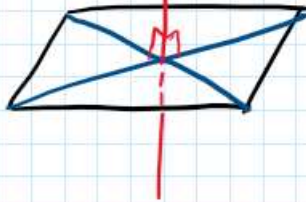
Справедлива й така теорема.

Теорема 34.4. Через дану точку можна провести пряму, перпендикулярну до даної площини, і до того ж тільки одну.

34.2.° Пряма t перпендикулярна до прямих a і b площини α . Чи впливає із цього, що пряма t перпендикулярна до площини α ?

Не завжди.

Перпендикулярна до площини.



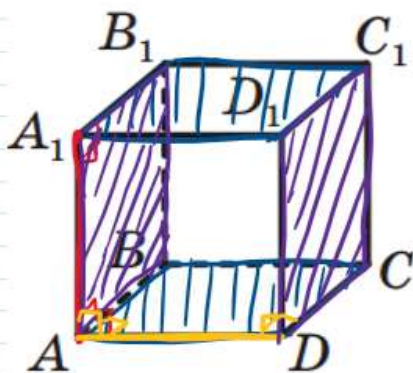
Належить площині.



Не належить площині, але і не перпендикулярна до неї.

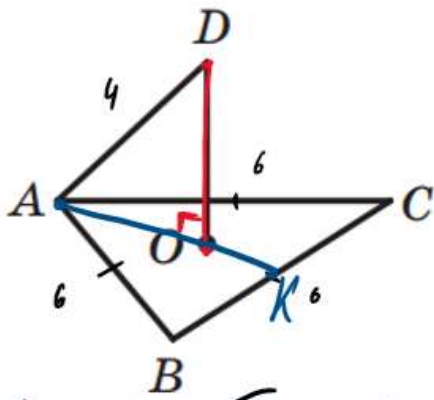


34.4.° Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 34.10). Назвіть грані куба, до яких перпендикулярна пряма: 1) AA_1 ; 2) AD .



- 1) $AA_1 \perp (A_1 B_1 C_1), AA_1 \perp (ABC)$.
- 2) $AD \perp (DD_1 C_1), AD \perp (AA_1 B_1)$.

34.7.° Через центр O правильного трикутника ABC проведено пряму DO , перпендикулярну до площини ABC (рис. 34.11). Знайдіть відрізок DO , якщо $AB = 6$ см, $DA = 4$ см.



Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = AC = 6$ см,
 $AD = 4$ см, $DO \perp (ABC)$,
 O - центр $\triangle ABC$.

Знайми: DO .

Розв'язання

Проведемо $AK \subset ABC$, AK -
 висота, бісектриса та медіана $\triangle ABC$. З $\triangle AKB$
 ($\angle K = 90^\circ$): $AB = 6$ см, $BK = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3$ см - за
 властивістю медіани AK , за теоремою Піфагора:

$$AK^2 = AB^2 - BK^2$$

$$AK^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$$

$$AK = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3} \text{ см}$$

O - центр $\triangle ABC$, тоді O - точка перетину
 медіан $\triangle ABC$. Далі $AO : OK = 2 : 1$ за властивістю
 точки перетину медіан \triangle .

Нехай $AO = 2x$ см, $OK = x$ см. Тоді оскільки

$$\frac{AK}{3\sqrt{3}} = \frac{AO}{2x} + \frac{OK}{x}, \text{ то } 2x + x = 3\sqrt{3}$$

$$3x = 3\sqrt{3}$$

$$x = \frac{3\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \sqrt{3} \text{ (см)} - OK.$$

$$AO = 2\sqrt{3} \text{ (см)}$$

З $\triangle AOD$ ($\angle O = 90^\circ$): $AD = 4$ см, $AO = 2\sqrt{3}$ см,
 тоді за теоремою Піфагора

$$OD^2 = AD^2 - AO^2$$

$$OD^2 = 4^2 - (2\sqrt{3})^2 = 16 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$OD = \sqrt{4} = 2 \text{ см}$$

Відповідь: $OD = 2$ см.

34.10. Діагональ B_1D прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дорівнює 17 см, а діагональ AB_1 бічної грані $AA_1 B_1 B$ дорівнює 15 см (рис. 34.14). Знайдіть ребро AD паралелепіпеда.

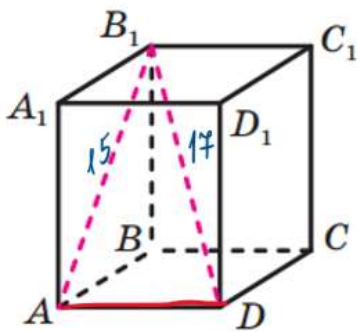


Рис. 34.14

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - паралелепіпед,
 $AB_1 = 15$ см, $B_1D = 17$ см.

Знайши: AD .

Розв'язання

Оскільки $AD \perp AA_1$ і $AD \perp BA$, то
 $AD \perp (ABB_1)$ за однакою перпендикулярності прямої і площини.

Розглянемо $\triangle AB_1D$ ($\angle A = 90^\circ$): за теор.

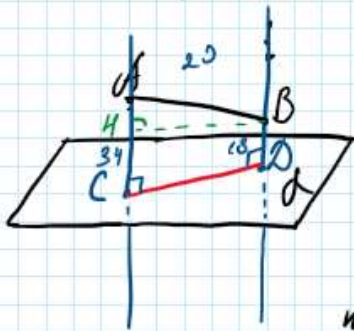
Піфагора $AD^2 = B_1D^2 - AB_1^2$

$$AD^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64$$

$$AD = \sqrt{64} = 8 \text{ (см).}$$

Відповідь: $AD = 8$ см.

34.13. Відрізок AB не перетинає площину α . Через точки A і B проведено прямі, які перпендикулярні до площини α та перетинають її в точках C і D відповідно. Знайдіть відрізок CD , якщо $AC = 34$ см, $BD = 18$ см, $AB = 20$ см.



Дано: $AB \nparallel \alpha$, $AC \perp \alpha$, $BD \perp \alpha$,
 $AC = 34$ см, $BD = 18$ см, $AB = 20$ см.

Розв'язання

Проведемо $BH \perp BD$; $BH \perp AC$.

$CHBD$ - прямокутник. Оскільки $BD = 18$ см,
 то $CH = BD = 18$ см. Тоді $AH = AC - CH$

$$AH = 34 - 18 = 16 \text{ (см).}$$

Розглянемо $\triangle ABH$ ($\angle H = 90^\circ$): за теоремою Піфагора

$$BH^2 = AB^2 - AH^2$$

$$BH^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144$$

$$BH = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}$$

$$CD = BH = 12 \text{ см.}$$

Відповідь: $CD = 12$ см.

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням

<https://forms.gle/rzcZt3ibqVAgNpZJA>.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com