

16.03.2023

Група 35

Математика

Урок 38 (алгебра)

Тема уроку: Перестановки, розміщення, комбінації.

Мета: ознайомити учнів з новим матеріалом; закріпити правила суми і добутку; досягти засвоєння основних правил та понять, а саме: правило суми і добутку, поняття факторіалу, розміщення, перестановки, комбінації. Навчати практичному застосуванню набутих знань; розвивати увагу й пам'ять; виховувати зацікавленість предметом.

Матеріали до уроку:

Закріплення матеріалу попереднього уроку:

Правило суми і правило добутку

Спочатку розглянемо правило суми:

якщо деякий елемент А можна вибрати m способами, а елемент В — n способами (причому будь-який вибір елемента А відрізняється від вибору елемента В), то вибрати А або В можна $m + n$ способами.

Приклад 1. В ящику знаходиться 7 білих і 4 чорних кульки. Тоді вибрати одну кульку: білу або чорну можна $7 + 4 = 11$ способами.

Зрозуміло, що правило суми можна розповсюдити на три і більше елементів.

Сформулюємо правило добутку:

якщо деякий елемент А можна вибрати m способами, а після кожного такого вибору інший елемент В можна вибрати (незалежно від вибору елемента А) — n способами, то пару об'єктів А і В можна вибрати mn способами.

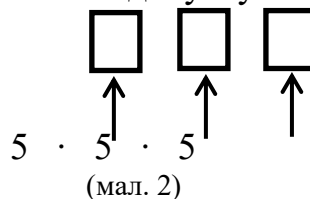
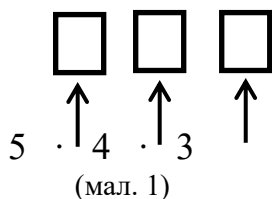
Приклад 2. У шкільній їдальні є вибір з 3 перших і 5 других блюд. Тоді обід з першого і другого блюда можна обрати $3 \cdot 5 = 15$ способами.

Правило добутку розповсюджується на три і більше елементів.

Приклад 3. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 1;2;3;4;5, якщо в числі: 1) цифри не повторюються; 2) цифри повторюються.

Розв'язання.

1) Маємо 5 способів для сотень числа (мал. 1). Після того, як місце сотень заповнене (наприклад, цифрою 1), для десятків залишається 4 способи. Міркуючи далі, для одиниць - 3 способи. Отже, маємо: «5 способів, і після кожного з них — 4, і після кожного з них — 3 способи». За правилом добутку маємо $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ чисел.



2) Якщо цифри у числі повторюються, то на кожне з трьох місць є по 5 варіантів заповнення (мал. 2), і тоді всіх чисел буде $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

1. Поняття факторіалу.

Означення. Факторіалом числа n , де n — ціле невід'ємне число називають добуток всіх натуральних чисел від 1 до n .

Позначають це так $n!$. Отже, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$. За означенням приймають $0! = 1$.

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Приклад 5. Спростити вираз $6!/5!$.

Розв'язання.

Маємо

2. Розміщення.

Нехай дано множину X з n елементів $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$.

Означення. Розміщенням з n елементів по k ($k < n$) називають будь-яку впорядковану підмножину Y множини X , причому дві такі підмножини вважають різними, якщо вони відрізняються складом або порядком елементів.

Для позначення цього числа застосовується спеціальний символ A_n^k (читається: «число розміщень із n по k » або « A із n по k »). A – перша буква французького слова «arrangement», що означає «розміщення, приведення у порядок».

Використовуючи позначення факторіала, формулу записують у вигляді:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Приклад 6. Нехай дано множину $X = \{1; 2; 3\}$. Тоді по одному можна скласти такі розміщення:

(1), (2), (3) - їх буде 3;

по два можна скласти такі розміщення:

(1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 3), (3; 1), (3; 2) - їх буде 6;

по три можна скласти такі розміщення:

(1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1) - їх буде 6.

Кількість розміщень можна записати $A_3^1 = 3$; $A_3^2 = 6$; $A_3^3 = 6$.

Приклад 7. Розклад на день містить 6 уроків. Визначити кількість всіх можливих розкладів при виборі з 9 предметів, при умові, що жоден предмет не стоїть у розкладі двічі.

Розв'язання. Зрозуміло, що таких розкладів буде

$$A_9^6 = \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 60480$$

Приклад 8. Скільки різних правильних дробів можна скласти з чисел 1; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19, які використовують для запису чисельника і знаменника дробу?

Розв'язання. Дробів, у яких чисельник не дорівнює знаменнику можна скласти A_8^2 штук, але лише половина з них правильні. Отже, шукана кількість дробів

$$\frac{1}{2} \cdot A_8^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8!}{6!} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 = 28$$

3. Перестановки.

Означення. Будь-яка впорядкована множина, яка складається з заданих n -елементів, називається *перестановкою із n -елементів*.

Число перестановок із n -елементів позначають через P_n . P – перша буква французького слова «permutation» -- «перестановки».

Кількість перестановок з n елементів позначають P_n . З означення випливає, що $P_n = A_n^n$. Тоді враховуючи формулу для A_n^k та $0! = 1$, маємо:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Отже, $P_n = n!$

Приклад 9. Скількома способами можна розставити на полиці 6 книжок?

Розв'язання. Очевидно, що шукана кількість способів дорівнює кількості перестановок з 6 елементів (книг): $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Приклад 10. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0; 1; 2; 3, якщо в кожному числі жодна з цифр не повторюється?

Розв'язання. З чотирьох цифр 0; 1; 2; 3 можна утворити P_4 перестановок. Але ті перестановки, які починаються з 0 не будуть записами чотирицифрових чисел, таких перестановок — P_3 . Отже, шукана кількість чотирицифрових чисел дорівнює $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 3!(4 - 1) = 6 \cdot 3 = 18$.

4. Комбінації (сполучення).

Нехай дано множину X з елементів $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$.

Означення. Комбінацією (сполученням) з n елементів по k ($k \leq n$) називають будь-яку підмножину Y множини X ; причому дві такі підмножини вважають різними, якщо вони відрізняються складом.

Число всіх комбінацій з n -елементів по k -елементів позначається символом C_n^k (читається: «число комбінацій із n по k » або «це із n по k »)

C – перша буква французького слова «combinasion» «комбінація».

У загальному випадку число комбінацій із n -елементів визначається такою формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

Наприклад,

Приклад 11. У вазі 6 червоних і 4 білих троянди. Скількома способами з вази можна вибрати: 1) три троянди; 2) дві червоні і одну білу троянду?

Розв'язання. 1) Оскільки порядок вибору не має значення, то вибрати три троянди з 10 можна C_{10}^3 способами.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120 \quad (\text{способів})$$

2) Дві червоні троянди можна вибрати C_6^2 способами, а одну білу — C_4^1 способами. Тому вибрати дві червоні і одну білу троянди можна способами. Маємо

$$C_6^2 \cdot C_4^1 = \frac{6!}{2!(6-2)!} \cdot \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{3! \cdot 4}{3!} = 15 \cdot 4 = 60 \quad (\text{способів})$$

Властивості комбінацій:

$$1. C_m^n = C_m^{m-n}$$

$$2. C_m^{n+1} = C_m^n \cdot \frac{m-n}{n+1}$$

$$3. C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$$

$$4. C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^m = 2^m$$

Якщо в комбінаторній задачі необхідно вибрати k елементів з n , то важливим є питання – необхідно враховувати порядок слідування елементів чи ні. Від цього залежить яку формулу (комбінаторну схему) необхідно використовувати: якщо порядок має значення, то використовуємо A_n^k , якщо ні — то C_n^k .

Пропонується наступна задача-схема.

В класі 20 учнів. Скількома способами з цього класу можна вибрати...	
старосту й його заступника	двох чергових
Обов'язки різні! Порядок має значення.	Обов'язки однакові! Порядок не має значення.
$A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 19 \cdot 20 = 380$	$C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$

Домашнє завдання:

Розв'язати наступні задачі:

1. В магазині є 8 видів цукерок у коробках. Скільки всього можна утворити наборів, кожен з яких складається з трьох видів цукерок?

А	Б	В	Г	Д
336	6	8!	56	112

2. Чемпіонат, в якому беруть участь 18 команд проводиться в два кола (тобто кожна команда двічі зустрічається з кожною з решти команд). Визначити, яка кількість зустрічей має бути проведена.

А	Б	В	Г	Д
288	153	306	18!	612

3. Скільки всього різних п'ятицифрових чисел (без повторення цифр) можна утворити з цифр 1; 2; 3; 4; 5?

А	Б	В	Г	Д
24	80	100	120	720

4. Скільки всього різних чотирицифрових чисел (без повторення цифр) можна утворити з цифр 0; 2; 4; 6; 8?

А	Б	В	Г	Д
120	48	96	24	інша відповідь

5. Скільки всього різних перших парних двоцифрових чисел можна утворити із цифр 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 не повторюючи цифр у числах?

А	Б	В	Г	Д
12	18	21	24	42

6. Скількома способами можна вибрати 2 олівці і 3 ручки з 5 різних олівців і 6 різних ручок?

А	Б	В	Г	Д
200	120	400	30	180

Зворотній зв'язок

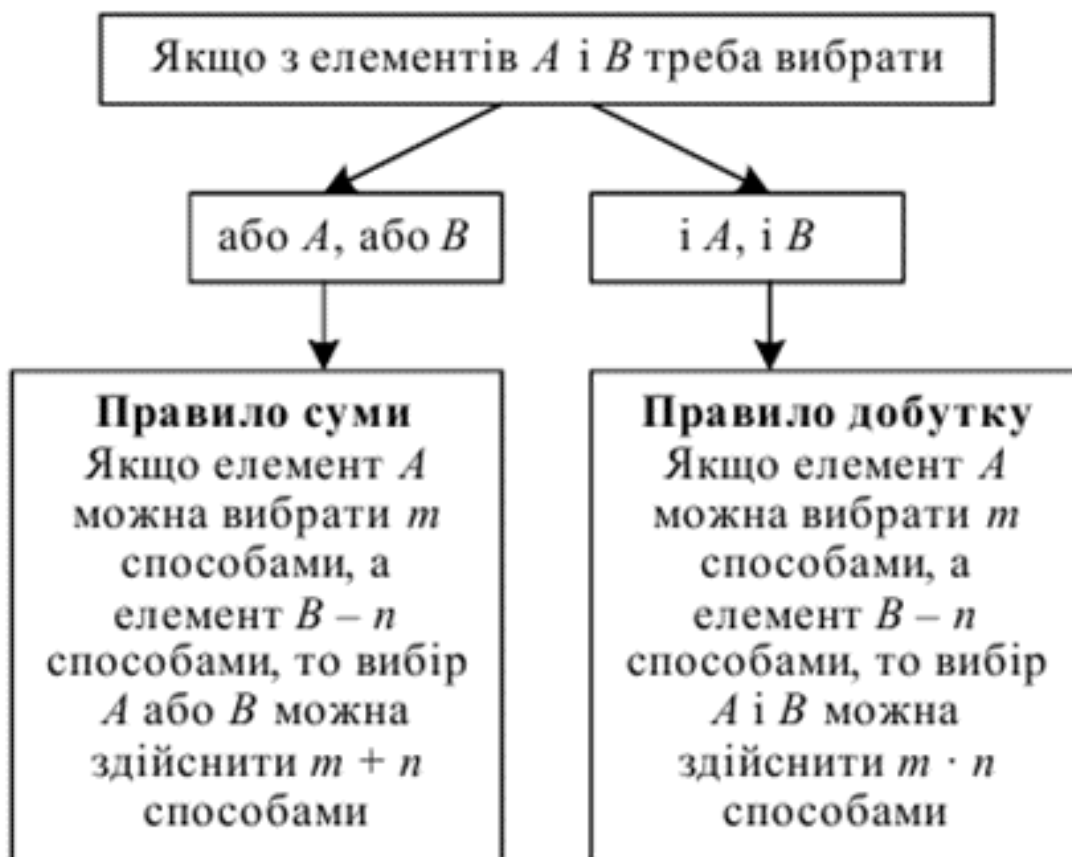
Viber/Telegram 0932186792

E-mail vitasergiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.

Додаток 1: вибір правила суми чи добутку

Вибір правила комбінаторного додавання і комбінаторного множення



Додаток 2: Вибір розміщення, перестановки чи комбінації

