17.01.2023

Група 15

Математика (алгебра)

Урок 26-27

Тема: Графіки тригонометричних функцій

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв’язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Ви знаєте, що для будь-якого числа x виконуються рівності

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi);$$
$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

Це означає, що значення функцій синус і косинус періодично повторюються при зміні аргументу на 2π. Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є прикладами **періодичних функцій.**

Означення. Функцію f називають періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x із області визначення функції f виконуються рівності

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

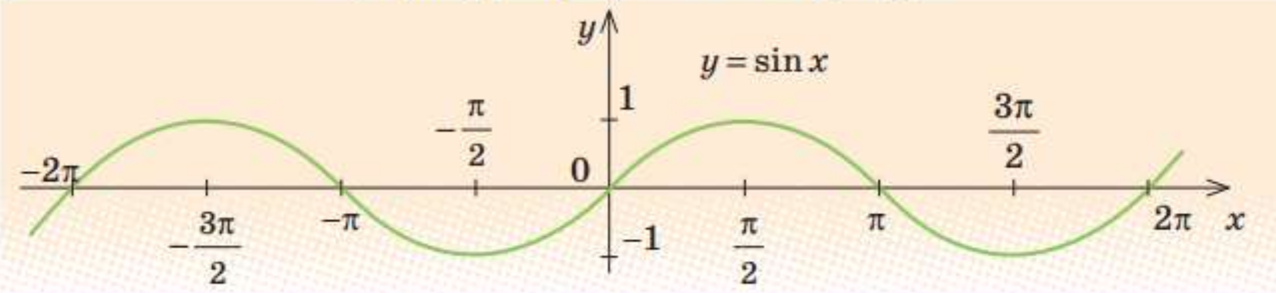
Число T називають періодом функції f.

Можна показати, що *коли функція f має період T, то будь-яке із чисел $2T$, $3T$, ..., а також будь-яке із чисел $-T$, $-2T$, $-3T$, ... також є її періодом.*

Якщо серед усіх періодів функції f існує найменший додатний період, то його називають **головним періодом** функції f.

Теорема 11.1. ***Головним періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є число 2π; головним періодом функції $y = \mathrm{tg}\, x$ є число π.***

Графік функції $y = \sin x$ (синусоїда)

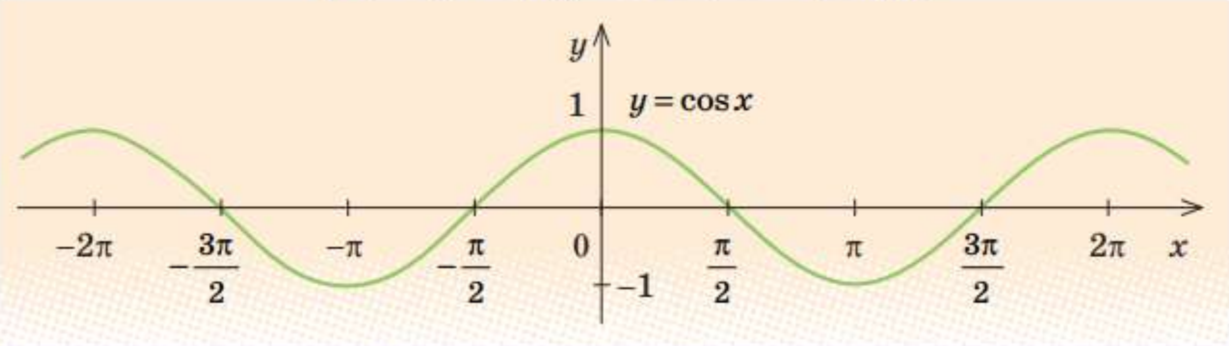


Властивості функції $y = \sin x$

1. *Область визначення*: $x \in \boldsymbol{R}$ (x — будь-яке дійсне число). $\boxed{D(\sin x) = \boldsymbol{R}}$
2. *Область значень*: $y \in [-1; 1]$. $\boxed{E(\sin x) = [-1; 1]}$
3. Функція **непарна**: $\sin(-x) = -\sin x$ (графік симетричний відносно початку координат).
4. *Функція періодична* з періодом $\boxed{T = 2\pi}$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
5. *Точки перетину з осями координат*: Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}}$ Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}}$
6. *Проміжки знакосталості*:
   $\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
7. *Проміжки зростання і спадання*:
   функція $\sin x$ **зростає на кожному з проміжків** $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$,
   і **спадає на кожному з проміжків** $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
8. **Найбільше значення** функції дорівнює 1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

   Найменше значення функції дорівнює –1 при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Графік функції $y = \cos x$ (косинусоїда)



Властивості функції $y = \cos x$

1. *Область визначення*: $x \in \boldsymbol{R}$ (x — будь-яке дійсне число).

$$\boxed{D(\cos x) = \boldsymbol{R}}$$

2. *Область значень*: $y \in [-1; 1]$. $\boxed{E = (\cos x) = [-1; 1]}$

3. *Функція **парна***: $\cos(-x) = \cos x$ (графік симетричний відносно осі Oy).

4. *Функція періодична з періодом* $\boxed{T = 2\pi}$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

5. *Точки перетину з осями координат*: Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 1; \end{cases}}$ Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}}$

6. *Проміжки знакосталості*:

$$\cos x > 0 \text{ **при** } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \boldsymbol{Z};$$

$$\cos x < 0 \text{ **при** } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \boldsymbol{Z}.$$

7. *Проміжки зростання і спадання*:

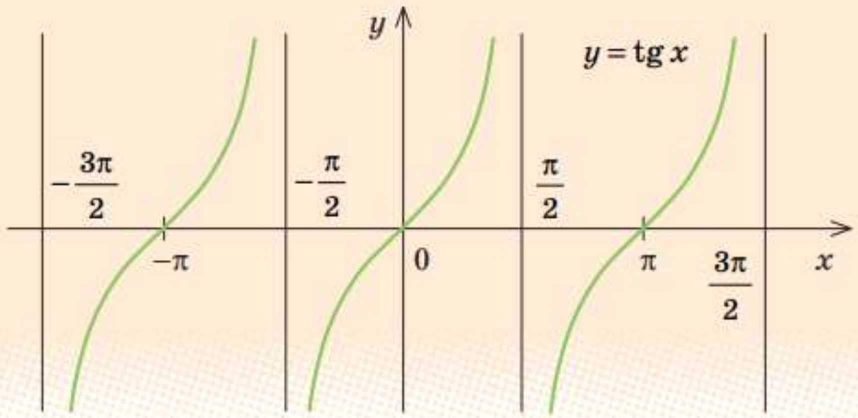
   функція $\cos x$ **зростає на кожному з проміжків** $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$,

   і **спадає на кожному з проміжків** $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$

8. **Найбільше значення** функції дорівнює 1 при $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

   Найменше значення функції дорівнює –1 при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$

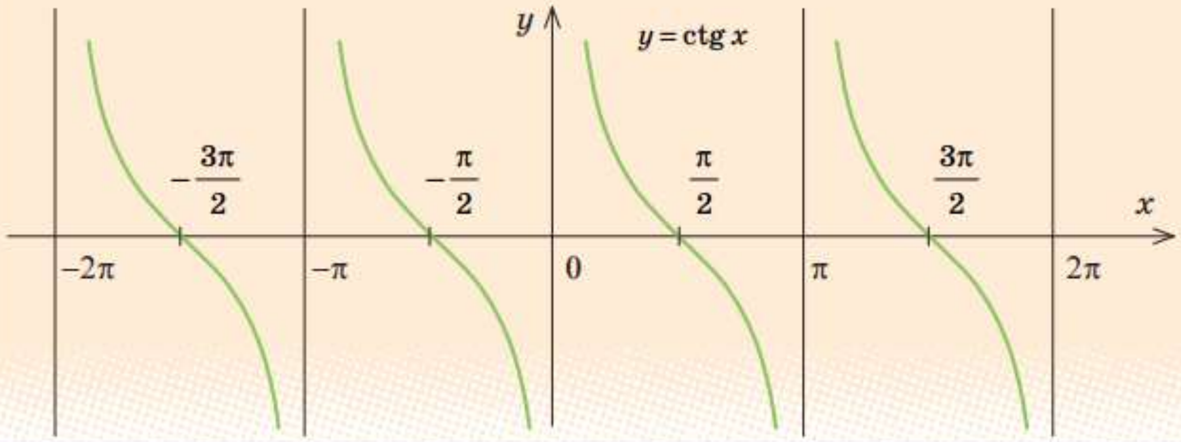
Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ (тангенсоїда)



Властивості функції $y = \operatorname{tg} x$

1. *Область визначення*:
$$D(\operatorname{tg} x):\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$
2. *Область значень*: $y \in \mathbf{R}$. $\boxed{E(\operatorname{tg} x) = \mathbf{R}}$.
3. *Функція **непарна***: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ (*графік симетричний відносно початку координат*).
4. *Функція періодична* з періодом $\boxed{T = \pi}$: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$.
5. *Точки перетину з осями координат*: *Oy* $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}}$ *Ox* $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}}$
6. *Проміжки знакосталості*:
$$\operatorname{tg} x > 0 \text{ при } x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \mathbf{Z};$$
$$\operatorname{tg} x < 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right),\ k \in \mathbf{Z}.$$
7. *Проміжки зростання і спадання*:
функція $\operatorname{tg} x$ **зростає на кожному з проміжків своєї області визначення**, тобто на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.
8. ***Найбільшого і найменшого значень функція не має.***

Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ (котангенсоїда)



Властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$

1. *Область визначення*:

$$D(\operatorname{ctg} x):\ x \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2. *Область значень*: $y \in R$. $\boxed{E(\operatorname{ctg} x) = \boldsymbol{R}}$.
3. *Функція* ***непарна***: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ (*графік симетричний відносно початку координат*).
4. *Функція періодична з періодом* $\boxed{T = \pi}$: $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$.
5. *Точки перетину з осями координат*: Oy **немає**, Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}}$
6. *Проміжки знакосталості*:

$$\operatorname{ctg} x > 0 \text{ при } x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z},$$

$$\operatorname{ctg} x < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

7. *Проміжки зростання і спадання:*
   функція $\operatorname{ctg} x$ **спадає на кожному з проміжків** своєї області визначення, тобто на кожному з проміжків $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
8. ***Найбільшого і найменшого значень функція не має.***

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Побудуйте графік функції та вкажіть нулі функції і проміжки знакосталості функції:

1) $y=2\sin x$; 2) $y=\sin 2x$.

Коментар

Графіки всіх заданих функцій можна одержати за допомогою геометричних перетворень графіка функції $f(x)=\sin x$. Отже, графіком кожної із цих функцій буде синусоїда, одержана:

1) $y=2\sin x=2f(x)$ розтягуванням графіка $y=\sin x$ удвічі вздовж осі Oy;

2) $y=\sin 2x=f(2x)$ стискуванням графіка $y=\sin x$ удвічі вздовж осі Ox.

Нулі функції — це абсциси точок перетину графіка з віссю Ox.

Щоб записати проміжки знакосталості функції, зазначимо, що функція $y=2\sin x$ періодична з періодом $T=2\pi$, а функція $y=\sin 2x$ періодична з періодом $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Тому для кожної функції достатньо з'ясувати на одному періоді, де значення функції додатні (графік розташований вище осі Ox) і де від'ємні (графік розташований нижче осі Ox), а потім одержані проміжки повторити через період.

Розв'язання

1) Графік функції $y=2\sin x$ одержуємо із графіка функції $y=\sin x$ розтягуванням його вдвічі вздовж осі Oy (рис. 9.4.1).

Нулі функції: $x=\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$.

Проміжки знакосталості:

$2\sin x>0$ при $x\in(2\pi k; \pi+2\pi k)$, $k\in \mathbf{Z}$;

$2\sin x<0$ при $x\in(\pi+2\pi k; 2\pi+2\pi k)$, $k\in \mathbf{Z}$.

Рис. 9.4.1

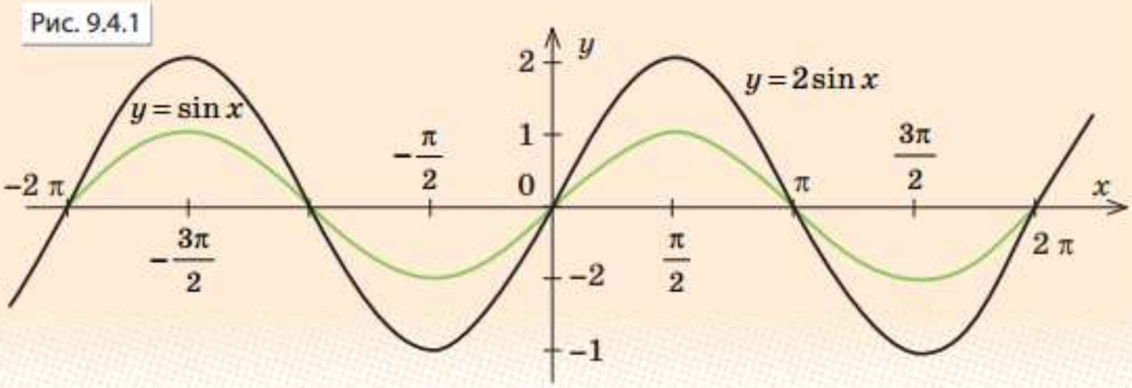
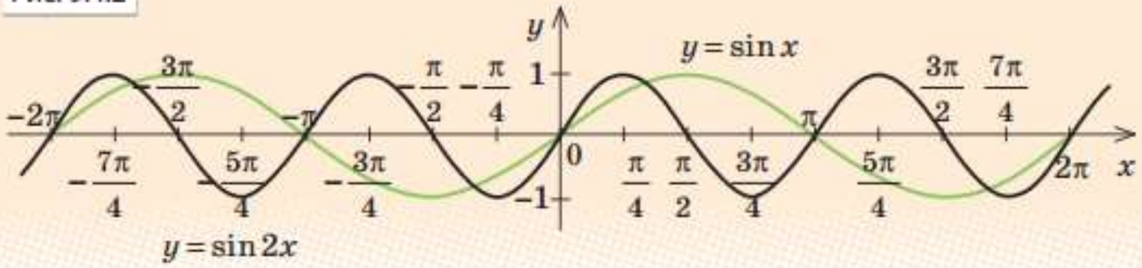


Рис. 9.4.2



2) Графік функції $y=\sin 2x$ одержуємо із графіка функції $y=\sin x$ стискуванням його вдвічі вздовж осі Ox (рис. 9.4.2).

Нулі функції: $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in \mathbf{Z}$.

Проміжки знакосталості:

$\sin 2x>0$ при $x\in\left(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in \mathbf{Z}$; $\sin 2x<0$ при $x\in\left(\frac{\pi}{2}+\pi;\pi+\pi k\right)$, $k\in \mathbf{Z}$. ■

Приклад 2. Розташуйте в порядку зростання числа: $\sin 1{,}9$; $\sin 3$; $\sin(-1)$; $\sin(-1{,}5)$.

Коментар

Для того щоб розмістити задані числа в порядку їх зростання, з'ясуємо, які з них додатні, а які — від'ємні, а потім порівняємо між собою окремо додатні числа і окремо від'ємні, користуючись відомими проміжками зростання і спадання функції $\sin x$.

Розв'язання

Числа $\sin 1{,}9$ і $\sin 3$ додатні (точки $P_{1,9}$ і P_3 розташовані в II чверті), а числа $\sin(-1)$ і $\sin(-1{,}5)$ від'ємні (P_{-1} і $P_{-1,5}$ розташовані в IV чверті).

Ураховуючи, що $\frac{\pi}{2}<1{,}9<\pi$, $\frac{\pi}{2}<3<\pi$ і що функція $\sin x$ спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, з нерівності $1{,}9<3$ одержуємо $\sin 1{,}9>\sin 3$.

Також $-\frac{\pi}{2}<-1<0$, $-\frac{\pi}{2}<-1{,}5<0$. Функція $\sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ зростає.

Ураховуючи, що $-1>-1{,}5$, одержуємо $\sin(-1)>\sin(-1{,}5)$. Отже, у порядку зростання ці числа розташовуються так: $\sin(-1{,}5)$; $\sin(-1)$; $\sin 3$; $\sin 1{,}9$. ■

Домашнє завдання: законспектувати, надіслати конспекти на перевірку на пошту.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com