

18.01.2023

Група Е-1

Вища математика

Урок 1-2

Тема: Матриці

Мета: познайомити з різними видами матриць та їх практичним застосуванням; навчити виконувати дії над матрицями; розвинути увагу та стійкість до поставлених задач, розвинути навички математичного мовлення.

Матеріали до уроку:

Матриці. Види матриць.

<p>Прямокутна таблиця, що складається з $m \times n$ чисел, розташованих в m рядках і n стовпцях, називається матрицею. Запис $m \times n$ позначає розмірність матриці.</p> <p>Числа a_{ik} називаються елементами матриці, перший індекс - номер рядка, другий - номер стовпця.</p> <p>Матриці позначаються великими латинськими літерами: A, B, C, D...</p> <p>Дві матриці називаються рівними, якщо у них однакова кількість рядків і стовпців, і відповідні елементи рівні.</p> <p>Матриця A^T, що одержується з матриці A заміною рядків стовпцями, називається транспонованою відносно матриці A:</p>	$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ <p>$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Матриця має розмірність 3×4</p> $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $A = B$ $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
<p>Матриця називається прямокутною, якщо кількість рядків і стовпців різна ($m \times n$), і квадратною, якщо кількість рядків і стовпців однакова ($m = n$), тоді n - порядок матриці.</p> <p>Головною діагоналлю квадратної матриці називається уявна пряма, що з'єднує її елементи, індекси яких однакові. Ці елементи називають діагональними.</p>	$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ - прямокутна $B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ - квадратна, другого порядку <p>Для матриці B: 3 і 4 – діагональні елементи</p>

<p>Матрицею-рядком називається матриця, яка складається з одного рядка ($1 \times n$- матриця).</p> <p>Матрицею-стовпцем називається матриця, яка складається з одного стовпця ($m \times 1$ - матриця).</p> <p>Матриця називається нульовою (нуль-матрицею), якщо всі її елементи дорівнюють нулю. Позначають нульову матрицю – O.</p> <p>Квадратна матриця, у якій всі елементи, що не стоять на головній діагоналі, дорівнюють нулю, називається діагональною.</p> <p>Одиничною матрицею називається діагональна матриця, у якій всі діагональні елементи дорівнюють одиниці. Позначають одиничну матрицю E.</p>	$\tilde{N} = (-7 \ 0 \ 1)$ $D = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
---	---

Дії над матрицями

<p>Добутком матриці A та довільного числа α називається матриця C, елементами якої є добутки елементів матриці A та числа α</p>	$B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}; 2B = \begin{pmatrix} 6 & 16 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$
<p>Додавати (віднімати) можна тільки матриці однакової розмірності.</p> <p>Щоб додати (відняти) дві матриці треба додати (відняти) їх відповідні елементи.</p>	<p>Наприклад, обидві матриці</p> $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ <p>мають розмірність 3×4, тому за означенням можна утворити їх суму — матрицю</p> $C = \begin{pmatrix} 5+0 & -8+1 & 0+2 & 2-1 \\ 4+5 & 3+6 & 1-7 & 2+10 \\ -1+1 & 2-3 & -7+4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
<p>Добутком tr - матриці A та pn-матриці B називається tn - матриця C, елементи якої c_{ik} ($i = 1, 2, \dots, t; k = 1, 2, \dots, n$) дорівнюють сумі добутків відповідних елементів i - го</p>	

<p>рядка матриці A і j-го стовпця матриці B, тобто</p> $c_{ik} = a_{1k}b_{1i} + a_{2k}b_{2i} + \dots + a_{pk}b_{pi}$ <p>Добуток матриць A і B позначається AB. Добуток AB має зміст лише при умові, що кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B.</p> <p>Множення матриць не підлягає комутативному (переставному) закону. Матриці, які підлягають комутативному закону, називаються комутативними.</p>	$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 7 \\ 5 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 25 \\ 23 & 38 \end{pmatrix}$ <p>$AB \neq BA$</p>
---	---

Перетворення

<p>Елементарними перетвореннями матриці A називаються такі її перетворення:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) заміна місцями двох рядків або двох стовпців матриці; 2) множення рядка або стовпця матриці на довільне відмінне від нуля число; 3) додавання елементів одного рядка або стовпця до відповідних елементів іншого рядка або стовпця, попередньо помноженого на деяке число. <p>Матриці, що мають рівні ранги, називатимемо еквівалентними матрицями.</p> <p>Еквівалентні матриці об'єднують знаком «\sim» («тильда»).</p>	<p>За допомогою елементарних перетворень знайти ранг матриці</p> $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & -6 \\ -3 & 1 & -4 & -7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ <p>Виконаємо спочатку елементарні перетворення матриці.</p> <p>1. Поміняємо місцями перший і другий стовпці:</p> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \quad (1)$ <p>2. За аналогією до того, як під час обчислення визначників утворювали нулі в рядках або стовпцях, утворимо нулі в першому стовпці. З цією метою всі елементи першого рядка спочатку помножимо на -4 і додамо до другого рядка, потім — на -1 і додамо до третього рядка і нарешті помножимо на 2 і додамо до четвертого рядка. У результаті дістанемо матрицю, яку в (1) записано другою. Помноживши тепер елементи першого стовпця послідовно на -2, -1, -3 і виконавши відповідне</p>
---	--

<p>Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.</p>	<p>додавання, дістанемо останню матрицю в ланцюжку перетворень (1).</p> <p>3. Помноживши другий рядок одержаної матриці на $-\frac{1}{9}$, третій — на $-\frac{1}{5}$, четвертий — на $-\frac{1}{3}$, дістанемо:</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$ <p>Виконаємо знову елементарні перетворення, аналогічні наведеним у п. 2, але візьмемо другий рядок і другий стовпець матриці.</p> <p>З остаточного вигляду матриці після виконання елементарних перетворень випливає, що її ранг дорівнює 2, оскільки єдиний мінор другого порядку не дорівнює нулю: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Решта мінорів вищого порядку дорівнюють нулю.</p>
---	---

Завдання для самоперевірки

- 1) Матрицею називається ...
- 2) Для того щоб дістати суму двох матриць, потрібно ...
- 3) Для того щоб помножити матрицю на скаляр, потрібно ...
- 4) Для знаходження добутку двох матриць потрібно, щоб ... причому елемент c_{ij} матриці добутку дорівнює ...

№1. Обчислити

а) $A-2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

б) AB , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Домашнє завдання:

Зробити конспект

Виконати вправу

Зворотній зв'язок:

vitasergiiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.