18.01.2023

Група М-1

Вища математика

Урок 1-2

Тема: Матриці

Мета: познайомити з різними видами матриць та їх практичним застосуванням; навчити виконувати дії над матрицями; розвинути увагу та стійкість до поставлених задач, розвинути навички математичного мовлення.

Матеріали до уроку:

<table>
<tr><th colspan="2">Матриці. Види матриць.</th></tr>
<tr><td>Прямокутна таблиця, що складається з $m\times n$ чисел, розташованих в m рядках і n стовпцях, називається матрицею. Запис $m\times n$ позначає розмірність матриці.
Числа $\boldsymbol{a_{ik}}$ називаються елементами матриці, перший індекс - номер рядка, другий - номер стовпця.
Матриці позначаються великими латинськими літерами: A, B, C, D…

Дві матриці називаються рівними, якщо у них однакова кількість рядків і стовпців, і відповідні елементи рівні.

Матриця A^T,що одернується з матриці A заміною рядків стовпцями, називається транспонованою відносно матриці A:</td><td>$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Матриця має розмірність 3×4

$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$
$A=B$
$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; $A^T=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>Матриця називається прямокутною, якщо кількість рядків і стовпців різна ($m\times n$), і квадратною, якщо кількість рядків і стовпців однакова ($m = n$), тоді n - порядок матриці.

Головною діагоналлю квадратної матриці називається уявна пряма, що з'єднує її елементи, індекси яких однакові. Ці елементи називають діагональними.</td><td>$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$- прямокутна

$B=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$- квадратна, другого порядку

Для матриці B: 3 і 4 – діагональні елементи</td></tr>
</table>

Матрицею-рядком називається матриця, яка складається з одного рядка ($1 \times n$- матриця). **Матрицею-стовпцем** називається матриця, яка складається з одного стовпця ($m \times 1$ - матриця). Матриця називається **нульовою (нуль-матрицею),** якщо всі її елементи дорівнюють нулю. Позначають нульову матрицю – *O*. Квадратна матриця, у якої всі елементи, що не стоять на головній діагоналі, дорівнюють нулю, називається **діагональною.** **Одиничною** матрицею називається діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці. Позначають одиничну матрицю *E*.	$\tilde{N} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Дії над матрицями	
Добутком матриці *A* та довільного числа α називається матриця С, елементами якої є добутки елементів матриці *A* та числа α	$B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 4 \end{pmatrix};\ 2B = \begin{pmatrix} 6 & 16 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$
Додавати (віднімати) можна тільки матриці однакової розмірності. Щоб **додати (відняти) дві матриці** треба додати (відняти) їх відповідні елементи.	Наприклад, обидві матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ мають розмірність 3×4, тому за означенням можна утворити їх суму — матрицю $C = \begin{pmatrix} 5+0 & -8+1 & 0+2 & 2-1 \\ 4+5 & 3+6 & 1-7 & 2+10 \\ -1+1 & 2-3 & -7+4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
Добутком *mp* - матриці *A* та *pn*-матриці *B* називається *mn* - матриця *C,* елементи якої $c_{ік}$ *(i* = 1, 2, ..., *m; к* = 1, 2, ... , *n)* дорівнюють сумі добутків відповідних елементів і - го	

<table>
<tr>
<td>
рядка матриці A і j-го стовпця матриці B, тобто
$c_{ik}=a_{n}b_{lk}+a_{a}b_{2k}+... + a_{ip}b_{pk}$.
Добуток матриць A і B позначається AB. Добуток AB має зміст лише при умові, що кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B.

Множення матриць не підлягає комутативному (переставному) закону. Матриці, які підлягають комутативному закону, називаються комутативними.
</td>
<td>
$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\\ 4 & 7\end{pmatrix}.$$
$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot 2+4\cdot 1+2\cdot 4 & 1\cdot 3+4\cdot 2+2\cdot 7\\ 5\cdot 2+1\cdot 1+3\cdot 4 & 5\cdot 3+1\cdot 2+3\cdot 7\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}14 & 25\\ 23 & 38\end{pmatrix}$$
$AB \neq BA$
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Перетворення</td>
</tr>
<tr>
<td>
Елементарними перетвореннями матриці А називаються такі її перетворення:

1) заміна місцями двох рядків або двох стовпців матриці;

2) множення рядка або стовпця матриці на довільне відмінне від нуля число;

3) додавання елементів одного рядка або стовпця до відповідних елементів іншого рядка або стовпця, попередньо помноженого на деяке число.

Матриці, що мають рівні ранги, називатимемо еквівалентними матрицями.

Еквівалентні матриці об’єднують знаком «~» («тильда»).
</td>
<td>
За допомогою елементарних перетворень знайти ранг матриці
$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 3\\ -1 & 4 & -5 & -6\\ -3 & 1 & -4 & -7\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$
Виконаємо спочатку елементарні перетворення матриці.
1. Поміняємо місцями перший і другий стовпці:
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & -5 & -6\\ 1 & -3 & -4 & -7\\ 2 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -9 & -9 & -18\\ 0 & -5 & -5 & -10\\ 0 & -3 & -3 & -6\end{pmatrix}\sim$$
$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -9 & -9 & -18\\ 0 & -5 & -5 & -10\\ 0 & -3 & -3 & -6\end{pmatrix}\ (1)$$
2. За аналогією до того, як під час обчислення визначників утворювали нулі в рядках або стовпцях, утворимо нулі в першому стовпці. З цією метою всі елементи першого рядка спочатку помножимо на –4 і додамо до другого рядка, потім — на –1 і додамо до третього рядка і нарешті помножимо на 2 і додамо до четвертого рядка. У результаті дістанемо матрицю, яку в (1) записано другою. Помноживши тепер елементи першого стовпця послідовно на –2, –1, –3 і виконавши відповідне
</td>
</tr>
</table>

Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.	додавання, дістанемо останню матрицю в ланцюжку перетворень (1). 3. Помноживши другий рядок одержаної матриці на $-\frac{1}{9}$, третій — на $-\frac{1}{5}$, четвертий — на $-\frac{1}{3}$, дістанемо: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$ Виконаємо знову елементарні перетворення, аналогічні наведеним у п. 2, але візьмемо другий рядок і другий стовпець матриці. З остаточного вигляду матриці після виконання елементарних перетворень випливає, що її ранг дорівнює 2, оскільки єдиний мінор другого порядку не дорівнює нулю: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Решта мінорів вищого порядку дорівнюють нулю.

Завдання для самоперевірки

1) Матрицею називається ...
2) Для того щоб дістати суму двох матриць, потрібно ...
3) Для того щоб помножити матрицю на скаляр, потрібно ...
4) Для знаходження добутку двох матриць потрібно, щоб ... причому елемент c_{ij} матриці добутку дорівнює ...

№1. Обчислити

а) *A-2B*, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

б) *AB,* якщо

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Домашнє завдання:
Зробити конспект
Виконати вправу

Зворотній зв`язок:
vitasergiivna1992@gmail.com
!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.