

20.01.2023

Група Е-1

Вища математика

Урок 3-4

Тема: Визначники, обернена матриця

Мета: познайомити з різними видами визначників та їх практичним застосуванням; навчити перетворювати матриці на обернені; розвинути увагу та стійкість до поставлених задач, розвинути навички математичного мовлення.

### Матеріали до уроку:

#### Визначники

<p><b>Визначник</b> – числова характеристика квадратної матриці.</p> <p><b>Визначником другого порядку</b> називається вираз</p> $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$ <p><b>Визначником третього порядку</b> називається вираз:</p> $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$	<p><math>\Delta = \begin{vmatrix} 2 &amp; -1 \\ 4 &amp; 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 10</math></p> <p>Для запам'ятовування правила обчислення визначника третього порядку існує схема (правило трикутників):</p>  <p><math>\Delta = \begin{vmatrix} 2 &amp; -1 &amp; 3 \\ 1 &amp; 4 &amp; 2 \\ 6 &amp; 0 &amp; -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot (-5) + 6 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 6 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot (-5) = -129</math></p>
<p>Квадратна матриця називається <b>неособливою (невиродженою)</b>, якщо її визначник не дорівнює нулю, і <b>особливою (виродженою)</b>, якщо її визначник дорівнює нулю.</p>	
<h4>Властивості визначників</h4>	
<p><b>Властивість 1.</b> Визначник не змінюється в результаті транспонування. (З властивості 1 випливає, що будь-яке твердження, що справджується для рядків визначника, справджується і для його стовпців, і навпаки.)</p> <p><b>Властивість 2.</b> Якщо один із рядків визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.</p> <p><b>Властивість 3.</b> Якщо поміняти місцями будь-які два рядки визначника, то його знак зміниться на протилежний.</p> <p><b>Властивість 4.</b> Визначник, що має два однакові рядки, дорівнює нулю.</p> <p><b>Властивість 5.</b> Якщо елементи будь-якого рядка визначника помножити на стале число <math>C</math>, то й визначник помножиться на <math>C</math>. (З цієї властивості випливає, що спільний множник елементів рядка можна виносити за знак визначника.)</p> <p><b>Властивість 6.</b> Визначник, що має два пропорційні рядки, дорівнює нулю.</p>	

**Властивість 7.** Якщо всі елементи будь-якого рядка визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому визначнику, а решта елементів будуть ті самі, що й у початковому визначнику.

**Властивість 8.** Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи довільного іншого рядка, попередньо помножені не деяке число

### Мінори та алгебраїчні доповнення

Нехай визначник має  $n$  рядків і  $n$  стовпців. **Мінором  $k$ -го порядку**  $k \in [1; n-1]$  називається визначник, утворений з елементів, розміщених на перетині будь-яких  $k$  рядків і  $k$  стовпців визначника. Зрозуміло, що мінор першого порядку — це будь-який елемент визначника.

Утворити кілька мінорів другого і один мінор третього порядку такого визначника:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$M_2^1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, M_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, M_2^3 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Мінори  $M_2^1$ ,  $M_2^2$ ,  $M_2^3$  другого порядку утворюються з елементів, розміщених на перетині першого, другого рядків; першого, другого стовпців; третього, четвертого рядків; першого, третього стовпців; другого, четвертого рядків; третього, четвертого стовпців. Мінор  $M_3^1$  третього порядку утворюється з елементів, розміщених на перетині другого, третього, четвертого рядків і першого, третього, четвертого стовпців. Верхній індекс означає нумерацію мінорів; нижній індекс — порядок мінора.

**Доповняльним мінором** для мінора  $k$ -го порядку називається такий мінор, який лишається у визначнику після викреслювання тих  $k$  рядків і тих  $k$  стовпців, на перетині яких містяться елементи, що утворили мінор  $k$ -го порядку.

Утворити доповняльний мінор другого порядку.  
Для визначника  $\Delta$  запишемо мінор другого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$M_2^1 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Цей мінор утворено з елементів, які містяться на перетині першого і третього рядків та другого і четвертого стовпців. Викреслимо ці рядки та стовпці з визначника  $\Delta$ , дістанемо  $M_{2\Delta}^1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$  — мінор, доповняльний до мінора другого порядку  $M_2^1$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

### Алгебраїчне доповнення мінора

— визначник, що складається з елементів, котрі не належать тим рядкам і тим стовпцям визначника, з яких утворено мінор, і береться зі знаком  $(-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}$ , де  $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_k$  — індекси відповідно тих рядків і тих стовпців, які брали участь в утворенні мінора.

Знайти алгебраїчні доповнення мінорів матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

### Обернена матриця

<p>Матриця <math>A^{-1}</math> називається <b>оберненою матрицею до квадратної невинродженої матриці</b> <math>A</math>, якщо виконується співвідношення: <math>AA^{-1} = A^{-1}A = E</math>.</p> <p>Обернена матриця має вигляд:</p> $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$ <p>де <math>A_{mn}</math> - алгебраїчні доповнення мінорів матриці <math>A</math>.</p>	<p>Знайти матрицю, обернену до матриці <math>A = \begin{pmatrix} 3 &amp; -1 &amp; 0 \\ -2 &amp; 1 &amp; 1 \\ 2 &amp; -1 &amp; 4 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>Обчислимо:</p> $\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5.$ <p><math>\Delta(A) \neq 0</math> — обернена матриця існує.</p> $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10,$ $A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4,$ $A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$ $A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$ $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$ $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$
---	--

### Завдання для самоперевірки

- 1) Матриця  $A^{-1}$  називається оберненою до невинродженої матриці  $A$ , якщо ...
- 2) Рангом матриці називається ...
- 3) Мінором  $k$ -го порядку називається ...
- 4) Алгебраїчним доповненням називається ..

#### №1. Обчислити

#### №2. Знайти визначники

$$\text{а) } \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0,5 & -0,8 \\ 0,2 & 0,6 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

#### №3. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

#### Домашнє завдання:

Зробити конспект

Виконати вправу

#### Зворотній зв'язок:

[vitasergiivna1992@gmail.com](mailto:vitasergiivna1992@gmail.com)

**!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.**