

20.01.2023

Група 26

Математика (алгебра)

Урок 27-28

Тема: Логарифми та їх властивості

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Легко розв'язати рівняння $2^x = 4$ і $2^x = 8$. Їхніми коренями будуть відповідно числа 2 і 3.

Проте для рівняння $2^x = 5$ одразу вказати його корінь складно.

Виникає природне запитання: чи є взагалі корені у цього рівняння?

Звернемося до графічної інтерпретації. На рисунку 4.1 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = 5$. Вони перетинаються в деякій точці $A(x_0; 5)$. Отже, рівняння $2^x = 5$ має єдиний корінь x_0 .

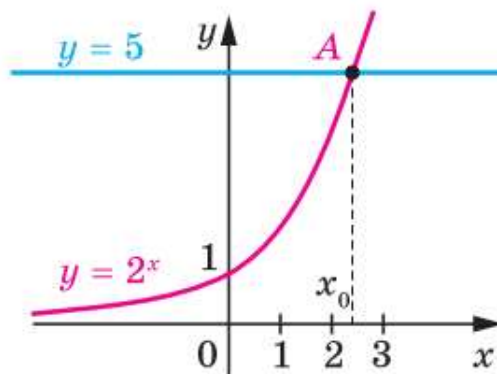


Рис. 4.1

Корінь рівняння $2^x = 5$ домовилися називати **логарифмом числа 5 з основою 2** та позначати $\log_2 5$. Таким чином, число $\log_2 5$ — це показник степеня, до якого треба піднести число 2, щоб отримати число 5. Можна записати:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

Означення. Логарифмом додатного числа b з основою a , де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a , щоб отримати число b .

Логарифм числа b з основою a позначають $\log_a b$.

Наприклад, $\log_3 9$ — це показник степеня, до якого потрібно піднести число 3, щоб отримати число 9. Маємо: $\log_3 9 = 2$, оскільки $3^2 = 9$.

Ще кілька прикладів:

$$\log_{17} 17 = 1, \text{ оскільки } 17^1 = 17;$$

$$\log_{100} 1 = 0, \text{ оскільки } 100^0 = 1;$$

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3, \text{ оскільки } 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

З означення логарифма випливає, що при $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$ виконується рівність

$$a^{\log_a b} = b$$

Її називають **основною логарифмічною тотожністю**.

Наприклад, $7^{\log_7 3} = 3$, $0,3^{\log_{0,3} 5} = 5$.

Також з означення логарифма випливає, що при $a > 0$ і $a \neq 1$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Логарифм з основою 10 називають десятковим логарифмом. Замість $\log_{10} b$ записують: $\lg b$.

Використовуючи це позначення та основну логарифмічну тотожність, для кожного $b > 0$ можна записати: $10^{\lg b} = b$.

Розглянемо основні властивості логарифмів.

Теорема 4.1 (логарифм добутку). Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Коротко формулюють: логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів.

Доведення. Розглянемо два вирази: $a^{\log_a xy}$ і $a^{\log_a x + \log_a y}$. Доведемо, що вони рівні.

Використовуючи основну логарифмічну тотожність і властивості степеня, запишемо:

$$\begin{aligned} a^{\log_a xy} &= xy; \\ a^{\log_a x + \log_a y} &= a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy. \end{aligned}$$

Отже, $a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Звідси за теоремою 2.1 отримуємо, що $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. ◀

Теорема 4.2 (логарифм частки). Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Коротко формулюють: логарифм частки дорівнює різниці логарифмів.

Теорема 4.3 (логарифм степеня). Якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x$$

Теорема 4.4 (перехід від однієї основи логарифма до іншої). Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, то виконується рівність

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Наслідок 1. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то виконується рівність

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Наслідок 2. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то для будь-якого $\beta \neq 0$ виконується рівність

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$$

Логарифм з основою 10 записується як $\lg a = b$, що означає $10^b = a$.

4.1.° Чи є правильною рівність:

1) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$;

3) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$;

5) $\log_{0,01} 10 = 2$;

2) $\log_{25} 5 = 2$;

4) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$;

6) $\lg 0,0001 = -4$?

1) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$
 $7^{-2} = \frac{1}{49}$

Правильна.

3) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$
 $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \neq 125$

Неправильна.

5) $\log_{0,01} 10 = 2$

$0,01^2 = 0,0001 \neq 10$

Неправильна.

2) $\log_{25} 5 = 2$

$25^2 = 625 \neq 5$

Неправильна.

4) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$

$3^{-4} = \frac{1}{81}$

Правильна.

6) $\lg 0,0001 = -4$

$10^{-4} = \frac{1}{10000} = 0,0001$

Правильна.

4.2.° Знайдіть логарифм з основою 2 числа:

1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) $\sqrt{2}$; 5) 0,5; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{1}{16}$; 8) $2\sqrt{2}$.

1) $\log_2 1 = 0$; 2) $\log_2 2 = 1$; 3) $\log_2 32 = 5$; 4) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$;

5) $\log_2 0,5 = \log_2 \frac{1}{2} = -1$; 6) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; 7) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$;

8) $\log_2 2\sqrt{2} = \log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$.

4.4.° Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{2}$ числа:

1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 0,25; 5) $\frac{1}{16}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt{2}$; 8) 64.

$$1) \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0; \quad 2) \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1; \quad 3) \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3; \quad 4) \log_{\frac{1}{2}} 0,25 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2;$$

$$5) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4; \quad 6) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2};$$

$$7) \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{1}{2}; \quad 8) \log_{\frac{1}{2}} 64 = -6.$$

4.6.° Знайдіть десятковий логарифм числа:

- 1) 1; 3) 100; 5) 0,1; 7) 0,00001;
 2) 10; 4) 1000; 6) 0,01; 8) 0,000001.

$$1) \lg 1 = 0; \quad 2) \lg 10 = 1; \quad 3) \lg 100 = 2; \quad 4) \lg 1000 = 3;$$

$$5) \lg 0,1 = \lg \frac{1}{10} = -1; \quad 6) \lg 0,01 = \lg \frac{1}{100} = -2; \quad 7) \lg 0,00001 = \lg \frac{1}{100000} = -5;$$

$$8) \lg 0,000001 = \lg \frac{1}{1000000} = -6.$$

4.7.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\log_7 x = -1;$ 3) $\log_{\sqrt{3}} x = 6;$ 5) $\log_x 9 = 2;$
 2) $\log_4 x = \frac{1}{9};$ 4) $\log_2 x = 0;$ 6) $\log_x 2 = 2.$

$$1) \log_7 x = -1 \quad x = 7^{-1} \quad x = \frac{1}{7}$$

$$2) \log_4 x = \frac{1}{2} \quad x = 4^{\frac{1}{2}} \quad x = \sqrt{4} \quad x = 2$$

$$3) \log_{\sqrt{3}} x = 6 \quad x = (\sqrt{3})^6 \quad x = 3^3 \quad x = 27$$

$$4) \log_x 9 = 2 \quad x = 2^0 \quad x = 1$$

$$5) \log_x 9 = 2 \quad x^2 = 9 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

$$6) \log_x 2 = 2 \quad x^2 = 2 \quad x_1 = \sqrt{2} \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

4.9.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $6^x = 2;$ 3) $0,4^x = 9;$ 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2;$
 2) $5^x = 10;$ 4) $2^{x-3} = 5;$ 6) $0,3^{3x+2} = 7.$

$$1) 6^x = 2 \quad x = \log_6 2$$

$$2) 5^x = 10 \quad x = \log_5 10$$

$$3) 0,4^x = 9 \quad x = \log_{0,4} 9$$

$$4) 2^{x-3} = 5 \quad x-3 = \log_2 5 \quad x = \log_2 5 + 3$$

$$5) \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$$

$$1-x = \log_{\frac{1}{3}} 2$$

$$-x = \log_{\frac{1}{3}} 2 - 1$$

$$x = 1 - \log_{\frac{1}{3}} 2$$

$$6) 0,3^{3x+2} = 7$$

$$3x+2 = \log_{0,3} 7$$

$$3x = \log_{0,3} 7 - 2$$

$$x = \frac{\log_{0,3} 7 - 2}{3}$$

4.11.° Обчисліть:

1) $2^{\log_2 32}$;

2) $5^{\log_5 0,45}$;

3) $7^{2\log_7 2}$.

1) $2^{\log_2 32} = 32$; 2) $5^{\log_5 0,45} = 0,45$; 3) $7^{2\log_7 2} = 7^{\log_7 2^2} = 2^2 = 4$.

4.13.° Знайдіть значення виразу:

1) $\log_6 3 + \log_6 2$;

3) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12$;

2) $\log_5 100 - \log_5 4$;

4) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4}$.

1) $\log_6 3 + \log_6 2 = \log_6 3 \cdot 2 = \log_6 6 = 1$;

2) $\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = 5$;

3) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12 = \log_{49} \frac{84}{12} = \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$;

4) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4} = \log_4 64 = 3$.

4.15.° Обчисліть:

1) $64^{0,5 \log_2 12}$;

3) $6^{1 + \log_6 5}$;

5) $6^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$;

7) $8^{1 - \log_2 3}$;

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8 - 2}$;

6) $2^{3 \log_2 5 + 4}$;

8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2 - 3}$.

$$1) 64^{0,5 \log_2 12} = 2^{1 \cdot 0,5 \log_2 12} = 2^{0,5 \log_2 12} = 2^{\log_2 12^0,5} = 12^0,5 = 17,28$$

$$2) \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6} = 3^{-1 \cdot \log_3 6} = 3^{\log_3 6^{-1}} = 6^{-1} = \frac{1}{6};$$

$$3) 6^{1 + \log_6 5} = 6^1 \cdot 6^{\log_6 5} = 6 \cdot 5 = 30;$$

$$4) \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_3 8 - 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_3 8} : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 8 : \frac{4}{9} = 8 \cdot \frac{9}{4} = 18;$$

$$5) 6^{\log_6 3} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-1 \cdot \log_6 3} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 3^{-1}} = 3^{-1} = \frac{1}{3};$$

$$6) 2^{3 \log_2 5 + 4} = 2^{3 \log_2 5} \cdot 2^4 = 2^{\log_2 5^3} \cdot 2^4 = 5^3 \cdot 2^4 = 125 \cdot 16 =$$

$$= 2000;$$

$$7) 8^{1 - \log_3 8} = 8^1 : 8^{\log_3 8} = 8 : 2^{3 \log_3 8} = 8 : 2^{\log_3 8^3} = 8 : 2^{\log_3 512} = 8 : 27 = \frac{8}{27};$$

$$8) \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 2 - 3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 2} : \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 9^{-\frac{1}{2} \log_3 2} : \frac{1}{27} = 9^{\log_3 2^{-\frac{1}{2}}} : \frac{1}{27} =$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}} : \frac{1}{27} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 27 = \frac{27}{\sqrt{2}} = \frac{27\sqrt{2}}{2}.$$

4.17.* Обчисліть:

1) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5};$

4) $\log_3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3};$

2) $\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343;$

5) $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56;$

3) $\log_9 \log_2 8;$

6) $2 \lg 5 + \frac{1}{2} \lg 16.$

$$1) \log_2 \log_5 \sqrt[8]{5} = \log_2 \log_5 5^{\frac{1}{8}} = \log_2 \frac{1}{8} \log_5 5 = \log_2 \frac{1}{8} \cdot 1 = \log_2 \frac{1}{8} = -3;$$

$$2) \log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343 = \log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 7^3 = \log_{\frac{2}{3}} 3 \cdot \log_{49} 7 = \log_{\frac{2}{3}} 3 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} = -1;$$

$$3) \log_9 \log_2 8 = \log_9 3 = \frac{1}{2}; \quad 4) \log_3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};$$

$$5) \log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56 = \log_2 \frac{5}{35} \cdot 56 = \log_2 \frac{5 \cdot 8}{5} = \log_2 8 = 3;$$

$$6) 2 \lg 5 + \frac{1}{2} \lg 16 = \lg 5^2 + \lg 16^{\frac{1}{2}} = \lg 25 \cdot \sqrt{16} = \lg 25 \cdot 4 = \lg 100 = 2.$$

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням

<https://forms.gle/JCzDeoDv8VL7x6Fe6>.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com