

21.03.2023

Група 24

Математика (геометрія)

Урок 21-22

Тема: Многогранник та його елементи. Призма

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Многогранник, кулю, конус, циліндр відносять до фігур, які називають **геометричними тілами** або просто **тілами**.

Не будь-яка фігура в просторі є тілом. Наприклад, пряма, площина, двогранний кут не є тілами. Ці фігури необмежені. Строге означення тіла виходить за рамки розглядуваного курсу.

Означення. **Многогранником** називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.

З такими елементами многогранника, як грані, ребра та вершини, ви вже знайомі.

Дві грані многогранника називають **сусідніми**, якщо у них є спільне ребро. Наприклад, грані $A_1B_1C_1D_1$ і A_1B_1BA куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.2) є сусідніми, оскільки ребро A_1B_1 у них спільне.

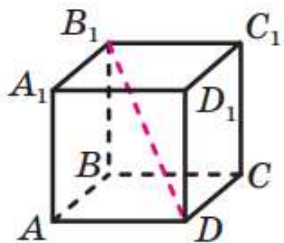


Рис. 16.2

Нехай точка M — вершина многогранника. Кут з вершиною M грані многогранника називають **плоским кутом многогранника при вершині M** . Наприклад, на рисунку 16.2 кут DAB є плоским кутом куба при вершині A .

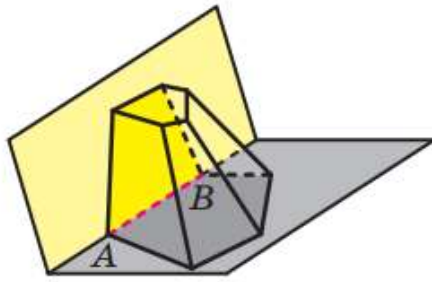


Рис. 16.3

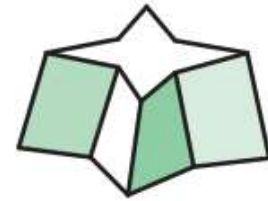


Рис. 16.4

Двогранним кутом многогранника при ребрі AB називають двогранний кут з ребром AB , грані якого містять сусідні грані многогранника, для яких ребро AB є спільним (рис. 16.3).

Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, називають діагоналлю многогранника. Наприклад, відрізок DB_1 — діагональ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 16.2).

Многогранники бувають опуклими та неопуклими.

Означення. Многогранник називають **опуклим**, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані.

Куб і тетраедр — приклади опуклих многогранників. На рисунку 16.4 зображено неопуклі многогранники.

Усі грані опуклого многогранника є опуклими многокутниками.

Площею поверхні многогранника називають суму площ усіх його граней.

Зупинимося докладніше на вже відомому вам виді многогранника — призмі.

Означення. Многогранник, дві грані якого — рівні n -кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта n граней — паралелограми, називають **n -кутною призмою**.

Нагадаємо, що паралелограми, про які йдеться в означенні, називають бічними гранями призми; рівні n -кутники — основами призми; сторони основ — ребрами основ призми; ребра, які не належать основам, — бічними ребрами призми (рис. 16.5).

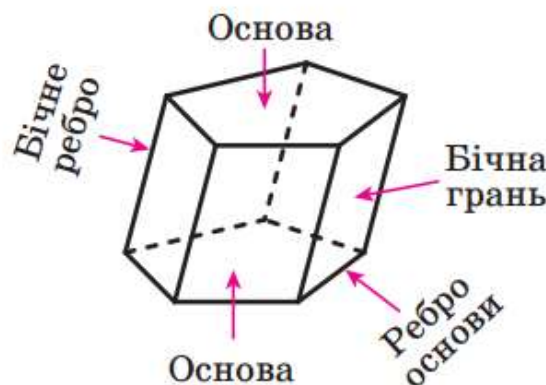


Рис. 16.5

Оскільки сусідні бічні грані призми — паралелограми, що мають спільну сторону — бічне ребро, то *всі бічні ребра призми є рівними та паралельними*.

Висотою призми називають перпендикуляр, опущений з якоїнебудь точки площини однієї основи на площину другої основи (рис. 16.6). Довжина висоти призми дорівнює відстані між площинами її основ.

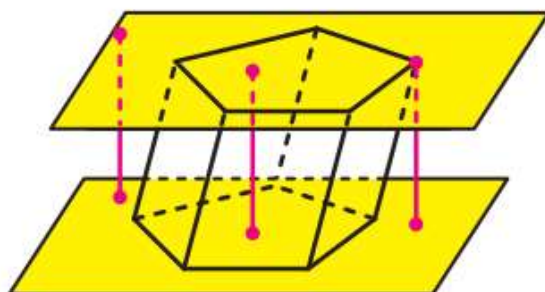


Рис. 16.6

Означення. Призму називають **прямою**, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Наприклад, прямокутний паралелепіпед є окремим видом прямої призми.

Кожне бічне ребро прямої призми є її висотою. Усі бічні грані прямої призми — прямокутники.

Якщо призма не є прямою, то її називають **похилою**.

Означення. Призму називають **правильною**, якщо вона є прямою та її основа — правильний багатокутник.

Наприклад, куб є окремим видом правильної чотирикутної призми.

На рисунку 16.7 зображено правильні трикутну та шестикутну призми.

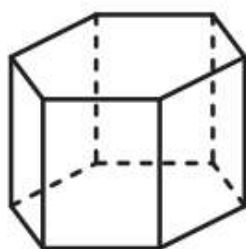
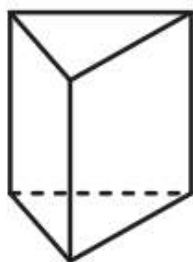


Рис. 16.7



Рис. 16.8

Розглянемо опуклу n -кутну призму ($n > 3$). Переріз призми площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, перетинає основи призми по діагоналях (рис. 16.8). Такий переріз називають **діагональним перерізом призми**.

Діагональним перерізом будь-якої призми є паралелограм, а прямої призми — прямокутник.

Площею бічної поверхні призми називають суму площ усіх її бічних граней. Площею поверхні призми (ще говорять: «площа повної поверхні призми») називають суму площ усіх її граней.

Очевидно, що виконується така рівність:

$$S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + 2S_{\text{осн}},$$

де $S_{\text{п}}$ — площа поверхні призми, $S_{\text{б}}$ — площа бічної поверхні призми, $S_{\text{осн}}$ — площа основи призми.

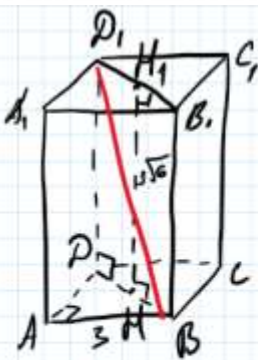
Теорема 16.1. Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми.

Результат теореми 16.1 зручно подати у вигляді формули:

$$S_{\text{б}} = P_{\text{осн}} \cdot b,$$

де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи прямої призми, b — довжина бічного ребра.

16.6.° Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 3 см, а висота — $3\sqrt{6}$ см. Знайдіть діагональ призми.



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильна призма,
 $AB = BC = CD = AD = A_1 B_1 = B_1 C_1 = C_1 D_1 = A_1 D_1 =$
 $= 3$ см; HH_1 — висота; $HH_1 = 3\sqrt{6}$ см.
 Знайти: $B_1 D_1$.

Розв'язуємо
 $HH_1 = BB_1 = DD_1 = 3\sqrt{6}$ см за властивістю
 висоти правильної конічної основи
 призми.

3 ΔABD ($\angle A = 90^\circ$): за теоремою Піфагора
 $BD^2 = AB^2 + AD^2$
 $BD^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$

$BD = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$ см = $B_1 D_1$.

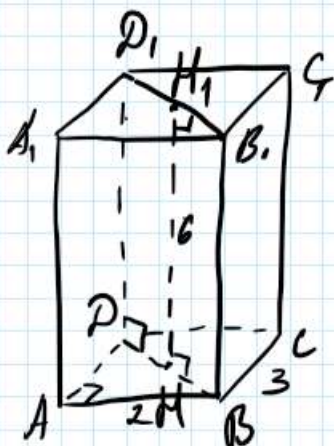
3 ΔBDD_1 ($\angle D = 90^\circ$): за теоремою Піфагора
 $BD_1^2 = BD^2 + DD_1^2$

$BD_1^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{6})^2 = 9 \cdot 2 + 9 \cdot 6 = 18 + 54 = 72$

$BD_1 = \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$ см

Відповідь: $B_1 D_1 = 6\sqrt{2}$ см.

16.8.° Знайдіть площу бічної поверхні прямої призми, висота якої дорівнює 6 см, а основою є паралелограм зі сторонами 2 см і 3 см.



Дано: $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ - крива,
 HH_1 - висота, $HH_1 = 6$ см,
 $ABCD$ - паралелограм, $AB = 2$ см,
 $BC = 3$ см.

Знайши: $S_{\text{б}}$.

Реш. знаємо

$$S_{\text{б}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1$$

$$P_{\text{осн}} = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (2 + 3) = 2 \cdot 5 = 10 \text{ см}$$

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = HH_1 = 6 \text{ см.}$$

$$S_{\text{б}} = 10 \cdot 6 = 60 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Відповідь: } S_{\text{б}} = 60 \text{ см}^2.$$

16.13.° Точки D і E — середини ребер AC і BC правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 16.11). Площина, яка проходить через пряму DE та утворює з площиною ABC кут 30° , перетинає ребро CC_1 у точці F . Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо сторона її основи дорівнює 12 см.

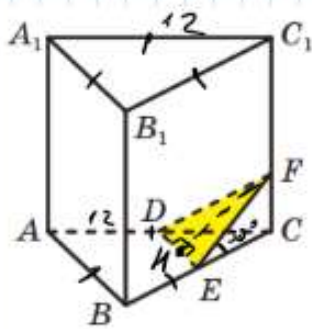


Рис. 16.11

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ - прямокутна призма,
 E - середина BC , D - середина AB ,
 $\angle FEC = 30^\circ$, $AB = BC = AC = A_1B_1 =$
 $= B_1C_1 = A_1C_1 = 12$ см.

Знайми: S_{DFE} .

Розв'язання

$$CE = BE = DC = AD = \frac{12}{2} = 6 \text{ см} - \text{за}$$

вл. середини сторони.

$$\text{З } \triangle ECF (\angle C = 90^\circ): FE = \frac{EC}{\cos \angle E}$$

$$FE = \frac{6}{\cos 30^\circ}$$

$$FE = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \text{ (см)} =$$

$$= DF.$$

DE - середня лінія $\triangle ABC$.

$$DE = \frac{AB}{2}$$

$$DE = \frac{12}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

FH - висота $\triangle DFE$. З $\triangle DFE: DH = HE = \frac{6}{2} = 3 \text{ (см)}$

За теоремою Піфагора $FH^2 = FE^2 - DH^2$

$$FH^2 = (4\sqrt{3})^2 - 3^2 = 16 \cdot 3 - 9 =$$

$$= 39$$

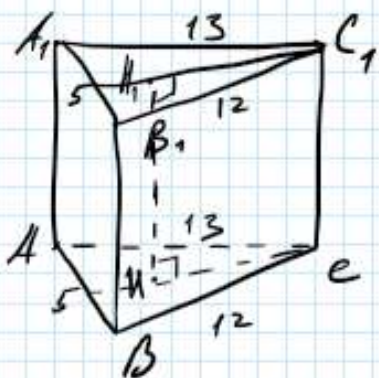
$$FH = \sqrt{39} \text{ см}$$

$$S_{\triangle DFE} = \frac{1}{2} DE \cdot FH$$

$$S_{\triangle DFE} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{39} = 3\sqrt{39} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Відповідь: } S_{DFE} = 3\sqrt{39} \text{ см}^2.$$

16.19.* Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 5 см, 12 см і 13 см, а площа повної поверхні — 270 см^2 . Знайдіть висоту призми.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ - трикутна
 призма; $AB = A_1B_1 = 5$ см,
 $BC = B_1C_1 = 12$ см, $AC = A_1C_1 =$
 $= 13$ см, $S_n = 270$ см²,
 HH_1 - висота.

Знайди: HH_1 .
 Розв'язання

$$S_n = S_б + 2S_{осн}$$

$$S_{осн} = S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$$

$$p = \frac{P}{2} = \frac{AB+BC+AC}{2}$$

$$p = \frac{5+12+13}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ см}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)} = \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} =$$

$$= \sqrt{900} = 30 \text{ (см}^2\text{)} = S_{осн}$$

$$S_б = S_n - 2S_{осн}$$

$$S_б = 270 - 2 \cdot 30 = 270 - 60 = 210 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_б = P_{осн} \cdot AA_1 \Rightarrow AA_1 = \frac{S_б}{P_{осн}}$$

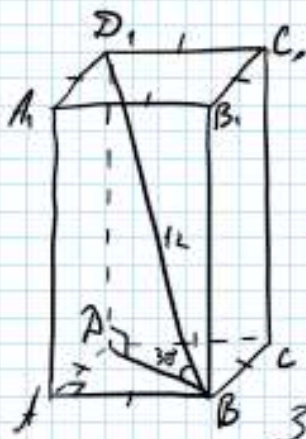
$$P_{осн} = AB + BC + AC$$

$$P_{осн} = 5 + 12 + 13 = 30 \text{ (см)}.$$

$$AA_1 = \frac{210}{30} = 7 \text{ (см)} = HH_1.$$

Відповідь: $HH_1 = 7$ см.

- 16.21.* Обчисліть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, діагональ якої дорівнює 12 см і нахилена до площини основи під кутом 30° .



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - правильна
 конічна циліндра,
 BD_1 - діюкалі, $BD_1 = 12$ см,
 $\angle D_1 B D = 30^\circ$, $AB = BC = CD = AD =$
 $= A_1 B_1 = B_1 C_1 = C_1 D_1 = A_1 D_1$.

Знайми: $S_{\text{б}}$.

Розв'язує

$$\triangle B D D_1 (\angle D = 90^\circ): DD_1 = \frac{BD_1}{2}$$

$DD_1 = \frac{12}{2} = 6$ (см) - за вл. катета квідрата
 кута 30° .

За теоремою Піфагора:

$$BD^2 = BD_1^2 - DD_1^2$$

$$BD^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$$

$$BD = \sqrt{108} = \sqrt{9 \cdot 12} = 3\sqrt{12} = 3\sqrt{4 \cdot 3} = 6\sqrt{3} \text{ (см).}$$

$\triangle A D B (\angle A = 90^\circ)$: $AB = AD = x$ см, за теоремою
 Піфагора $AB^2 + AD^2 = BD^2$

$$x^2 + x^2 = (6\sqrt{3})^2 \quad x^2 = 54$$

$$2x^2 = 36 \cdot 3 \quad x = \sqrt{54}$$

$$2x^2 = 108 \quad x = \sqrt{9 \cdot 6}$$

$$x^2 = \frac{108}{2}$$

$$x = 3\sqrt{6} \text{ (см)} - AB = AD.$$

$$S_{\text{б}} = P_{\text{осн}} \cdot DD_1$$

$$P_{\text{осн}} = 4AB = 4 \cdot 3\sqrt{6} = 12\sqrt{6} \text{ (см)}$$

$$S_{\text{б}} = 12\sqrt{6} \cdot 6 = 72\sqrt{6} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Відповідь: } S_{\text{б}} = 72\sqrt{6} \text{ см}^2.$$

Домашнє завдання: пройти тест за посиланням
<https://forms.gle/3SbidWfMnYBN33rZ6>.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com